

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИВАНОВСКАЯ ПОЖАРНО-
СПАСАТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ
СЛУЖБЫ МИНИСТЕРСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ДЕЛАМ ГРАЖДАНСКОЙ ОБОРОНЫ, ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ И
ЛИКВИДАЦИИ ПОСЛЕДСТВИЙ СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ»**



Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Прикладная механика»

Специальность
20.05.01 Пожарная безопасность

Профиль
«Пожарная безопасность государства»

Иваново 2023

Киселев В.В.

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Прикладная механика» (далее – методические рекомендации) по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность, профиль «Пожарная безопасность государства» – Иваново: ИПСА ГПС МЧС России, 2023. – 70 с.

Методические рекомендации содержат краткое изложение дисциплины «Прикладная механика» в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – специалитет по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность и основной профессиональной образовательной программы высшего образования по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность, советы по планированию и организации времени, необходимого на изучение дисциплины, пожелания по изучению отдельных тем курса, рекомендации по использованию материалов учебно-методического комплекса, рекомендации по работе с литературой; советы по подготовке к промежуточной аттестации.

Методические рекомендации рассмотрены на заседании кафедры механики, ремонта и деталей машин (в составе УНК «Пожаротушение»).

Протокол № ____ от _____ 2023 г.

Методические рекомендации обсуждены и одобрены на заседании методико-педагогического совета Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России.

Протокол № ____ от _____ 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

№ п/п	Наименование раздела	Стр.
1.	Введение	4
2.	Методические рекомендации по изучению тем дисциплины	6
2.1	Тема 1. Статика	6
2.2	Тема 2. Кинематика точки, твердого тела и механизмов	14
2.3	Тема 3. Динамика	24
2.4	Тема 4. Структурный и кинематический анализ плоских механизмов	30
2.5	Тема 5. Простые виды деформаций	37
2.6	Тема 6. Прямой поперечный изгиб	47
2.7	Тема 7. Сложное сопротивление	53
3.	Методические рекомендации для подготовки к промежуточной аттестации	59
4.	Словарь терминов по дисциплине «Прикладная механика»	69

Введение

Дисциплина «Прикладная механика» является основой общетехнической и общепрофессиональной подготовки инженера любого профиля, в частности, инженера пожарной безопасности.

Прикладная механика – это отрасль науки, изучающая движение любого вещества, которое может быть испытано или воспринято людьми без помощи инструментов. Другими словами, когда концепции механики выходят за рамки теоретических и применяются и выполняются, общая механика становится прикладной механикой. Именно это резкое различие делает прикладную механику важным пониманием для практической повседневной жизни. Она имеет множество применений в самых разных областях и дисциплинах, включая, помимо прочего, проектирование конструкций, метеорологию, гидравлику, машиностроение, нанотехнологии, проектирование конструкций, гидродинамика и другие науки о жизни. Связывая исследования между многочисленными дисциплинами, прикладная механика играет важную роль как в науке, так и в технике.

Развитие современной пожарной техники ставит перед инженерами пожарной безопасности самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т.п.), с эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как пожарные автомобили, составляющие их узлы (гидроприводы, насосы). Конструирование машины независимо от того, выполняется оно учащимся или опытным инженером, - процесс творческий. Каждая конструкторская задача, как правило, имеет много решений. Опираясь на имеющиеся теоретические знания, учащийся должен выбрать из многих возможных решений одно, наилучшее. При этом ему приходится принимать во внимание часто противоречивые технологические и эксплуатационные требования, предъявляемые к проектируемому изделию. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу.

Большой вклад в развитие науки внесли и русские ученые. Д.И. Журавскому принадлежит теория расчета мостовых ферм, а также формула для определения касательных напряжений при изгибе балки; А.В. Годолин разработал методы расчета толстостенных цилиндров; Х.С. Головин произвел расчет кривого бруса; Ф.С. Есинский решил задачу по определению критических напряжений при продольном изгибе в неупругой работе материала и т.д.

В XX столетии роль русских ученых в области расчета строительных конструкций стала ведущей. А.Н. Крыловым, И.Г. Бубновым и П.Ф. Папковичем была создана общая теория расчета конструкций, лежащих на грунтовом основании. В трудах видных ученых С.П. Тимошенко, А.Н. Динника, Н.Н. Давиденкова, С.В. Сересена, В.В. Болотина, В.З. Власова, А.А. Ильюшина, И.М. Рабиновича, А.Р. Ржаницына, А.Ф. Смирнова и многих других были развиты новые направления по созданию удобных методов расчета на прочность,

устойчивость и динамические воздействия различных сложных пространственных сооружений.

На современном этапе развития большое внимание уделяется сближению расчетных схем и основных допущений с действительными условиями эксплуатации зданий и сооружений. С этой целью проводятся исследования по выявлению влияния на напряженно-деформированное состояние конструкций изменчивого характера прочностных параметров материала, внешних воздействий, нелинейной связи напряжений и деформаций, больших перемещений и т.д. Разработка соответствующих расчетных методик производится с использованием специальных разделов математики. В настоящее время создано большое число стандартных программ для ЭВМ, позволяющих не только осуществить расчеты различных сооружений, но производить конструирование отдельных элементов и выполнять рабочие чертежи.

Основные теоретические положения, изучаемые в дисциплине «Прикладная механика» широко используются при изучении ряда специальных дисциплин, а именно: «Здания и сооружения и их устойчивость при пожаре», «Пожарная безопасность в строительстве», «Расследование и экспертиза пожаров», «Пожарная безопасность технологических процессов», «Теория горения и взрыва», «Гидравлика», «Противопожарное водоснабжение» и т. д.

Эффективность освоения дисциплины «Прикладная механика» в значительной мере зависит от содержания и постановки лабораторного практикума, поскольку лабораторные работы являются связующим звеном теории и практики, курсового проектирования, практикума решения прикладных практических задач. Данные мероприятия позволяют углублять и закреплять теоретические знания.

Методические рекомендации по изучению тем дисциплины

Тема 1. Статика

Движение является способом существования материи, ее основным неотъемлемым свойством. Под движением в общем смысле понимается не только перемещение тел в пространстве, но и тепловые, химические, электромагнитные и любые другие изменения и процессы, включая наше сознание и мысль.

Механика изучает наиболее простую и легко наблюдаемую форму движения - механическое движение.

Механическим движением называется как происходящее с течением времени изменение положения материальных тел относительно друг друга, так и изменение относительного положения частиц одного и того же материального тела, т. е. его деформация.

Нельзя, конечно, все многообразие явлений природы свести только к механическому движению и объяснить их на основании положений одной механики. Механическое движение никоим образом не исчерпывает существа различных форм движения, но оно всегда присутствует в каждой из них и должно быть исследовано раньше всего остального.

В связи с колоссальным развитием науки и техники стало невозможным в одной дисциплине сосредоточить изучение множества вопросов, связанных с механическим движением различного рода материальных тел. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных технических дисциплин, посвященных проектированию и расчету различных сооружений, механизмов и машин.

Материальные тела, с которыми имеют дело в этих дисциплинах, весьма различны, но движение их обладает многими общими свойствами, не зависящими от физических свойств самих движущихся тел. Эти общие свойства механического движения материальных тел и изучаются в теоретической механике.

Теоретической механикой называется наука, изучающая общие законы механического движения материальных тел и устанавливающая общие приемы и методы для решения вопросов, связанных с этим движением.

Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения материальных точек в пространстве.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

Теоретическая механика служит научным фундаментом для многих технических дисциплин. Ее методами и приемами пользуются при всех технических расчетах, связанных с проектированием различных сооружений и машин и их эксплуатацией. Роль и значение теоретической механики для техники непрерывно возрастает. Сложнейшие проблемы, постоянно возникающие в связи с гигантским развитием техники, организацией и развитием все новых и новых видов производства и новых технических средств, уже нельзя решать на основе одних опытных данных, на основе одной практики. Требуется научное предвидение и

строгий предварительный расчет, основанные на глубоком знании теории, причем в первую очередь на знании законов и методов теоретической механики.

Момент силы. Пара сил

Возникновение понятия момента силы относительно центра связано с задачей о рычаге. Представим себе твердое тело (рис. 1.1), имеющее сферическую шарнирную опору, помещенную в центре O тяжести тела. Если к телу приложить силу P_1 на некотором расстоянии h_1 от неподвижной точки O , то тело начнет вращаться вокруг этой точки. Если же к телу приложить еще и другую силу P_2 , стремящуюся вращать тело в направлении, противоположном вращению силой P_1 в плоскости силы P_1 и точки O , и если при этом отношение модулей сил P_1 и P_2 будет обратно пропорционально их расстояниям h_1 и h_2 от неподвижной точки O , то тело будет оставаться в равновесии.

Вращательное действие силы P_1 будет уравниваться вращательным действием силы P_2 , если $\frac{P_1}{P_2} = \frac{h_2}{h_1}$ и, следовательно, $P_1 h_1 = P_2 h_2$.

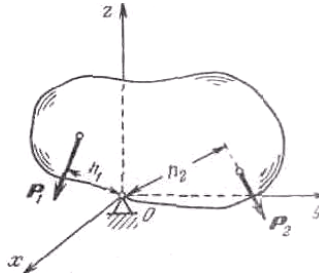


Рис. 1.1. Вращение твердого тела

Таким образом, мерой вращательного эффекта силы относительно какой-либо точки (центра) является *произведение модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние ее линии действия от центра момента*. Это произведение называется *модулем момента силы относительно этого центра*.

Для эквивалентности вращательного действия двух сил относительно какого-либо центра равенства модулей их моментов относительно этого центра недостаточно. Необходимо еще, чтобы совпадали плоскости, проходящие через линии действия сил и центр моментов, и чтобы силы вращали тело вокруг центра моментов в одном и том же направлении.

Таким образом, для полного определения вращательного эффекта силы относительно какого-либо центра необходимо знать не только модуль момента силы, но и указать плоскость, проходящую через линию действия силы и центр момента, а также сторону вращения в этой плоскости.

Положение плоскости в пространстве определяется, как известно, положением перпендикуляра к этой плоскости.

Из всего сказанного вытекает следующее векторное определение момента силы относительно точки: *моментом силы относительно какой-либо точки O (центра) называется приложенный к этой точке вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой расположены линия действия силы и*

центр O , и притом в ту сторону, откуда вращение тела силой представляется совершающимся против часовой стрелки.

Вектор момента силы P относительно центра O будем обозначать символом $M_O(P)$.

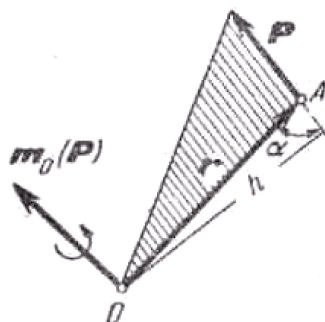


Рис. 1.2. Момент силы

Модуль момента силы относительно центра равен, как было сказано выше, произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из центра момента на линию действия силы (рис. 1.2).

$$|M_O(P)| = Ph. \quad (1.1)$$

Можно сказать, что момент силы относительно какого-либо центра равен векторному произведению радиуса-вектора r , проведенного из центра момента в точку приложения силы на вектор силы.

$$M_O(P) = r \times P. \quad (1.2)$$

Момент силы относительно точки является одним из важнейших понятий механики. Обобщая это понятие, можно находить момент относительно любой точки, независимо от того, может ли в действительности тело вращаться вокруг этой точки.

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил P и P' называется парой сил. Плоскость, в которой находятся линии действия сил P и P' называется плоскостью действия пары сил (рис. 1.3).

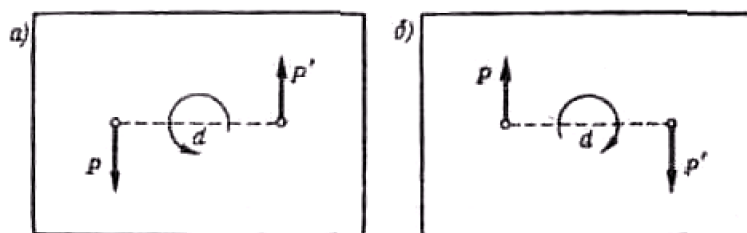


Рис. 1.3. Пара сил

Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой. Пара сил стремится произвести вращение твердого тела, к которому она приложена. Пара сил, не имея равнодействующей, очевидно, не может быть уравновешена силой. Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил, составляющих пару, называется плечом пары сил.

Действие пары сил на твердое тело характеризуется ее моментом. *Момент пары сил определяется произведением модуля одной из сил пары на ее плечо:*

$$M = Pd \quad (1.3)$$

Если силы выражать в ньютонах, а плечо – в метрах, то момент пары сил будет выражаться в ньютон-метрах (Н·м).

Момент пары сил изображают вектором. *Вектор момента M пары $P P'$ направляют перпендикулярно плоскости действия пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость ее действия в сторону, обратную вращению часовой стрелки (рис. 1.4).*

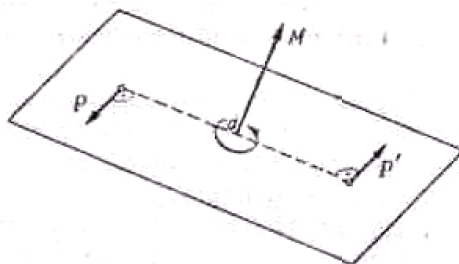


Рис. 1.4. Вектор момента пары сил

Вместо вектора момента каждой пары сил, перпендикулярного плоскости чертежа, указывают только направление, в котором пара сил стремится вращать эту плоскость.

В этом случае *момент пары сил определяют произведением модуля сил на плечо пары сил, взятым со знаком плюс или минус, т.е. момент пары сил рассматривают как алгебраическую величину:*

$$M = \pm Pd \quad (1.4)$$

Момент пары сил считают положительным, если пара сил стремится вращать плоскость чертежа в сторону, противоположную вращению часовой стрелки (рис. 1.4), и отрицательным — в сторону вращения часовой стрелки.

Связи. Реакции связей

Задаваемые силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело.

Одним из основных положений механики является *принцип освобожденности твердых тел от связей*, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое кроме задаваемых сил действуют реакции связей.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 1.5). Плоскость, ограничивая движение шара, является для него связью.

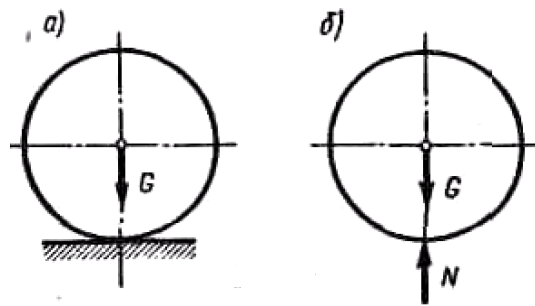


Рис. 1.5. Принцип освобождения от связи

Если мысленно освободить шар от связи (рис. 1.5), то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу N , равную весу шара G по модулю и противоположную ему по направлению. Сила N и будет реакцией плоскости. Тогда шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действуют задаваемая сила G и реакция плоскости N .

Гладкая плоскость не противодействует перемещению тела вдоль плоскости под действием задаваемых сил (рис. 1.6, а), но не допускает его перемещения в направлении, перпендикулярном плоскости. Поэтому действие плоскости на тело выражается нормальной реакцией (рис. 1.62, б). *Реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно плоскости.*

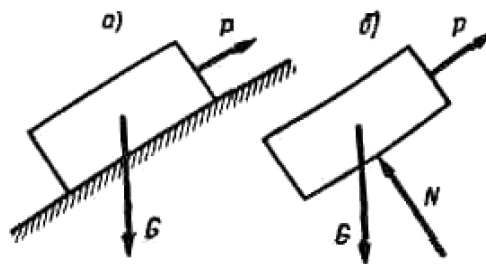


Рис. 1.6. Связь – гладкая поверхность

Если к концу B нити AB , прикрепленной в точке A , подвесить груз весом G (рис. 1.7, а), то реакция S нити будет приложена к грузу в точке B , равна по модулю его весу S и направлена вертикально вверх (рис. 1.7, б). *Реакция нити направлена вдоль нити.*

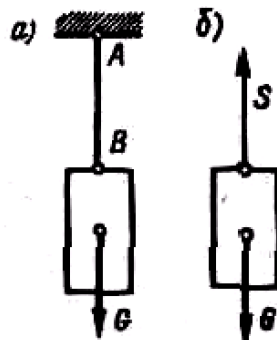


Рис. 1.73. Связь – тонкий стержень

Пусть балка весом G в точке B опирается на гладкую поверхность, а в точках A и D – на гладкие горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 1.8). Тогда реакции опорной поверхности и опорных плоскостей будут иметь указанные на рис. 1.8 направления.

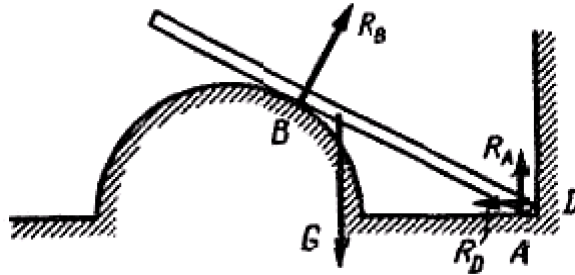


Рис. 1.8. Реакции связей балки

Для определения каждой реакции нужно знать три ее элемента: модуль, направление и точку приложения. Точка приложения реакции, как правило, бывает известна. Направление же реакций известно лишь для некоторых типов связей.

Если существуют два взаимно перпендикулярных направления на плоскости, в одном из которых связь препятствует перемещению тела, а в другом – нет, то направление ее реакции противоположно первому направлению.

Рассмотрим два основных типа опор балок и их реакции.

На рис. 1.9 изображена шарнирно-неподвижная опора, которая препятствует любому поступательному движению балки, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. По своей конструкции такая шарнирная опора состоит из двух обойм, из которых одна закреплена на балке, а другая – на неподвижной поверхности. Эти обоймы соединяются с помощью цилиндрического валика (показано среднее сечение конструкции). В зависимости от действующих сил валик может прижиматься к различным точкам обоймы. Реакция R шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира O и точку соприкосновения A (рис. 1.10, а, б), но ее модуль и направление не известны.

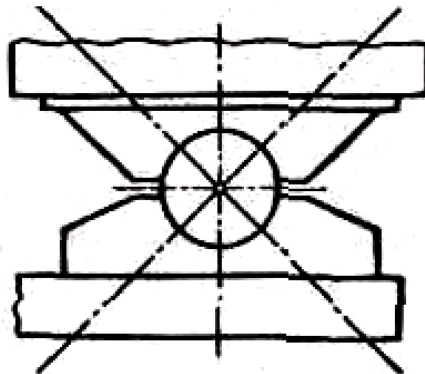


Рис. 1.9. Шарнирно-неподвижная опора

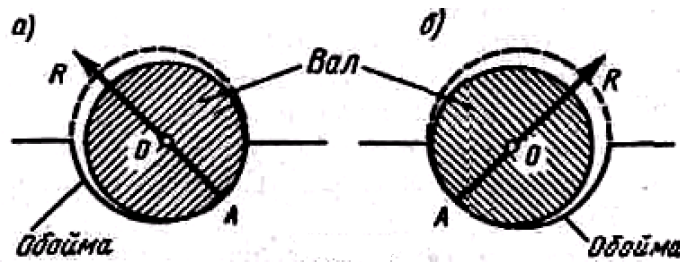


Рис. 1.10. Возможные направления реакций шарнирно-неподвижной опоры

Шарнирно-подвижная опора, нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости (рис. 1.11). Если не учитывать трения катков, то линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно опорной плоскости. Таким образом, не известен лишь модуль этой реакции.

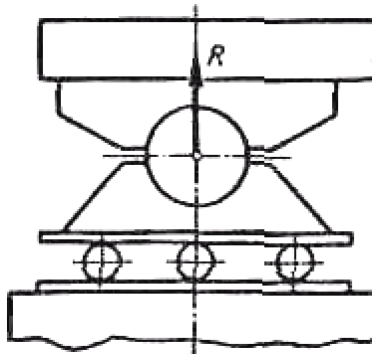


Рис. 1.11. Шарнирно-подвижная опора

Пусть в какой-нибудь конструкции связью является *стержень*, закрепленный на концах шарнирами (рис. 1.12). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах A и B . Вообще эти силы могут быть направлены произвольно. Но если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках A и B силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня. Следовательно, нагруженный на концах стержень, *весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь*, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то *реакция N стержня будет направлена вдоль оси стержня*.

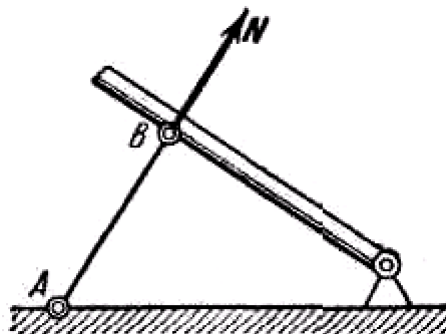


Рис. 1.12. Реакция в тонком стержне AB

Аксиома связей. Равновесие несвободных тел изучается в статике на основании следующей аксиомы: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.*

Определение реакций связей имеет то практическое значение, что, зная их, мы будем знать и силы давления на связи, т. е. те исходные данные, которые необходимы для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

Аналитические условия равновесия произвольной системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил даются равенствами $R=0$, $M_O=0$. Найдем вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил. Их можно получить в трех различных формах.

1. Основная форма условий равновесия. Так как вектор R равен нулю, когда равны нулю его проекции $R_x=0$ и $R_y=0$, то для равновесия должны выполняться равенства $R_x=0$, $R_y=0$ и $M_O=0$, где в данном случае M_O - алгебраический момент, а O - любая точка в плоскости действия сил.

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum M_O(F_k) = 0. \quad (1.5)$$

Формулы выражают следующие аналитические условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.* Одновременно равенства (1.5) выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2. Вторая форма условий равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю:*

$$\sum M_A(F_k) = 0, \sum M_B(F_k) = 0, \sum F_{kx} = 0 \quad (1.6)$$

3. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов): *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A , B , и C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю:*

$$\sum M_A(F_k) = 0, \sum M_B(F_k) = 0, \sum M_C(F_k) = 0 \quad (1.7)$$

Тема 2. Кинематика точки, твердого тела и механизмов

Предмет кинематики

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается, движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Тело, положение которого по отношению к выбранной системе отсчета не изменяется, находится в состоянии относительного покоя (по отношению к этой системе).

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, и все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается метр.

Время в классической механике предполагается универсальным, т. е. одинаковым во всех системах отсчета и не зависящим от движения одной системы относительно другой. Оно рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина. За единицу времени принимается секунда, равная $\frac{1}{(24 \cdot 3600)}$ средних солнечных суток. Все кинематические величины, характеризующие движение твердого тела и движение отдельной его точки (расстояния, скорости, ускорения и т.д.), рассматриваются как функции времени.

Хотя евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно, тем не менее, они позволяют с достаточной для практики точностью изучать движения, скорости которых далеки от скорости света.

Все кинематические характеристики движения твердого тела или отдельных его точек одинаковы для «материальных» и «геометрических» точек, поэтому ниже употребляется термин «точка» без пояснения, «материальная» она или «геометрическая».

Скорость и ускорение точки

Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Если точка за равные промежутки времени проходит равные отрезки пути, то ее движение называется равномерным.

Скорость равномерного движения измеряется отношением пути, пройденного точкой за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени

$$V = \frac{S}{t} \quad (2.1)$$

Если же точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то ее движение называется неравномерным.

Из этого определения ясно, что скорость неравномерного движения есть величина переменная и является функцией времени:

$$V = f(t) \quad (2.2)$$

Часто бывает необходимо определить *среднюю скорость неравномерного движения за некоторый промежуток времени, т. е. скорость такого равномерного движения, при котором точка проходит за определенный промежуток времени такой же путь, как и при неравномерном движении.*

Пусть S - путь, проходимый точкой при неравномерном движении, и t - время, за которое точка проходит этот путь. Средняя скорость определится по формуле

$$V_{cp} = \frac{S}{t} \quad (2.3)$$

Рассмотрим точку A , которая перемещается по заданной траектории по некоторому закону $S = f(t)$ (рис 2.1).

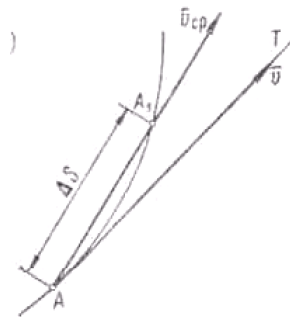


Рис. 2.1. Траектория движения точки

За промежуток времени Δt точка A переместится в положение A_1 , по дуге AA_1 . Если промежуток времени Δt мал, то дугу AA_1 можно заменить её хордой и найти в первом приближении величину средней скорости движения точки

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Эта скорость направлена по хорде от точки A к точке A_1 . Мгновенную скорость найдем путем перехода к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Когда $\Delta t \rightarrow 0$, направление хорды в пределе совпадает с направлением касательной к траектории в точке A .

Итак, *величина скорости точки определяется как предел отношения приращения пути к соответствующему промежутку времени при стремлении последнего к нулю, а направление ее совпадает с касательной к траектории в данной точке.*

В общем случае при движении по криволинейной траектории скорость точки изменяется и по направлению, и по величине. *Изменение скорости в единицу времени определяется ускорением.*

Пусть точка A движется по какой-то криволинейной траектории и за время Δt перешла из положения A в положение A_1 . Путь, пройденный точкой, представляет дугу AA_1 , ее длину обозначим ΔS (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Вектора скоростей и ускорений движущейся точки

В положении A точка имела скорость \vec{V} , в положении A_1 - скорость \vec{V}_1 . Геометрическую разность скоростей найдем, построив из точки A вектор \vec{V}_1 . Приращение скорости изображается вектором ΔV .

Среднее значение ускорения, характеризующего отмеченное изменение скорости, можно найти, поделив вектор приращения скорости ΔV на соответствующее время движения Δt

$$a_{cp} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получим истинное ускорение точки

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Найденное ускорение характеризует изменение скорости и по величине, и по направлению. Для удобства его раскладывают на взаимно перпендикулярные составляющие по касательной и нормали к траектории движения (рис. 1.2):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (2.8)$$

Касательная составляющая \vec{a}_τ совпадает по направлению со скоростью или противоположна ей. Она характеризует изменение величины скорости и соответственно определяется по формуле

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Нормальная составляющая \vec{a}_n перпендикулярна к направлению скорости точки. Она не может влиять на величину скорости, но зато определяет изменение её направления. Нормальное ускорение определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{r}, \quad (2.10)$$

где r - радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Поскольку составляющие \vec{a}_τ и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны, полное ускорение может быть найдено по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (2.11)$$

Способы задания движения точки

Естественный способ задания движения точки, применяемый в случае, когда траектория точки заранее известна. Траекторией может быть как прямая, так и кривая линия (рис. 2.3).

Выберем на траектории неподвижную точку O , которую назовем началом отсчета дуговой координаты. Положение движущейся точки M на траектории будем определять дуговой координатой, т. е. расстоянием $OM = S$ отложенным по траектории от начала отсчета O .

Расстояния, отложенные в одну сторону от точки O , будем считать положительными, а в противоположную - отрицательными, т. е. установим направление отсчета дуговой координаты.

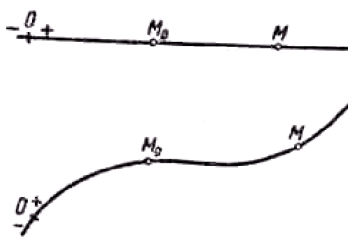


Рис. 2.3. Естественное движение точки

При движении точки M расстояние S от этой точки до неподвижной точки O изменяется с течением времени, т. е. *дуговая координата S является функцией времени*: $S = f(t)$.

Эта зависимость называется *уравнением движения точки*. Если вид функции $f(t)$ известен, то для каждого значения t можно найти значение S , отложить соответствующее расстояние по траектории и указать, где находится движущаяся точка M в этот момент времени.

Таким образом, *движение точки определено, если известны следующие элементы: траектория точки, начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения $S = f(t)$* .

Дуговую координату точки не следует смешивать с длиной пути σ , пройденного движущейся точкой. Дуговая координата S точки M в некоторый момент времени t может быть равна пути σ , пройденному точкой за промежуток времени $[0, t]$, только в том случае, если движение точки начинается из точки O и совершается в положительном направлении.

Если в начальный момент времени t_0 точка занимала положение M_0 , а в момент времени t занимает положение M (рис. 2.3), то пройденный ею путь за промежуток $[0, t]$ при движении точки в одном направлении определяется по формуле:

$$\sigma = |M_0M| = |OM - OM_0| = |S - S_0| \quad (2.12)$$

Изменение дуговой координаты S за элементарный промежуток времени dt равно дифференциалу дуги: $ds = f'(t)dt$; при движении точки в сторону возрастания дуг $dS > 0$; при движении точки в противоположную сторону $dS < 0$.

Приращение пути $d\sigma$ (элементарное перемещение точки) всегда положительно, т.е. $d\sigma = |dS| = |f'(t)|dt$.

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени $[0, t]$, определяется как предел суммы элементарных перемещений точки этот промежуток времени:

$$\sigma_{0t} = \int_0^t |f'(t)|dt \quad (2.13)$$

Дуговая координата S и путь σ выражаются в метрах.

Координатный способ задания движения точки. Положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяется тремя декартовыми координатами x, y, z (рис. 2.4).

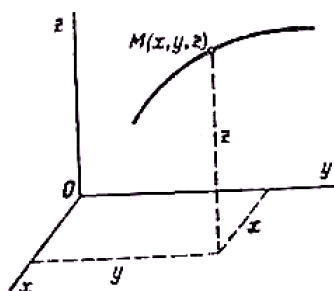


Рис. 2.4. Координаты точки

При движении точки M её координаты изменяются с течением времени. Следовательно, координаты x, y, z движущейся точки M являются функциями времени t :

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t) \quad (2.14)$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения точки в декартовых координатах*. Уравнениями определяется движение точки.

Действительно, имея эти уравнения, можно для каждого момента времени t найти соответствующие координаты x, y, z и по ним определить положение точки в пространстве в этот момент времени.

Движение точки M в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения $x = f_1(t); y = f_2(t)$.

Прямолинейное движение точки M определяется одним уравнением движения: $x = f(t)$.

В этом случае координатный способ задания движения точки сводится к естественному.

Уравнения движения, определяющие координаты точки в любой момент времени, можно рассматривать как *параметрические уравнения траектории точки*. При исключении параметра t из уравнений движения получаются *уравнения траектории точки в координатной форме*.

Пусть уравнения движения точки M имеют вид:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (2.15)$$

Решив первое уравнение относительно t , получим $t = \varphi(x)$.

Подставив полученное для t выражение в два других уравнения, найдем уравнения траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)]; \quad z = f_3[\varphi(x)]. \quad (2.16)$$

Как известно из аналитической геометрии, линии в пространстве соответствуют два уравнения с тремя координатами.

Пусть движение точки M в плоскости задано уравнениями:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (2.17)$$

Исключив параметр t , получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2[\varphi(x)]. \quad (2.18)$$

Помимо декартовых координат для определения положения точки на плоскости и в пространстве применяют и другие системы координат (полярные, цилиндрические, сферические и др.)

Векторный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис. 2.5).

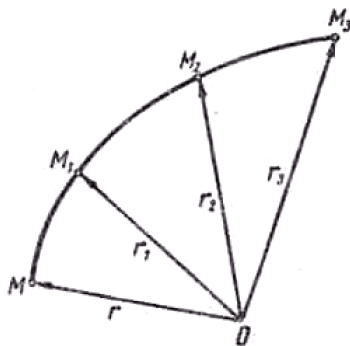


Рис. 2.5. Радиус-векторы движущейся точки

Для определения движения точки нужно знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор \vec{r} , т. е. должна быть задана вектор-функция \vec{r} аргумента t : $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория точки является геометрическим местом концов радиуса-вектора \vec{r} движущейся точки.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется *годографом этого вектора*. Следовательно, *траектория точки M является годографом ее радиуса-вектора \vec{r} .*

Векторный способ определения движения материальной точки или системы материальных точек широко используется и в кинематике, и в динамике, так как он значительно упрощает многие выводы и иногда подчеркивает физическую сущность явлений.

От векторных формул легко перейти к аналитическим выражениям, обычно более удобным для вычислений.

Поступательное и вращательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, движется, оставаясь параллельной своему начальному положению.

Примерами поступательного движения тела могут служить: движение кузова автомашины, движущейся по прямолинейному пути, движение поршня двигателя и т. д. Неправильно, однако, думать, что при поступательном движении тела траектории его точек должны быть непременно прямыми линиями. Так, например, спарник AB (рис. 2.6), соединяющий кривошипы O_1A и O_2B двух осей O_1 и O_2 , совершает поступательное движение, хотя его точки по отношению к корпусу паровоза и будут двигаться по окружностям. В самом деле, при вращении кривошипов O_1A и O_2B вокруг их осей O_1 и O_2 положение спарника AB будет изменяться. Но при равенстве длин кривошипов и при длине спарника, равной расстоянию между осями O_1O_2 , четырехугольник O_1ABO_2 будет всегда оставаться параллелограммом, следовательно, спарник AB всегда параллелен основанию O_1O_2 т.е. он движется, оставаясь параллельным своему начальному положению. В то же время точки A и B спарника, а, следовательно, и все остальные его точки по отношению к корпусу паровоза движутся по окружностям, радиус которых равен длине кривошипа.

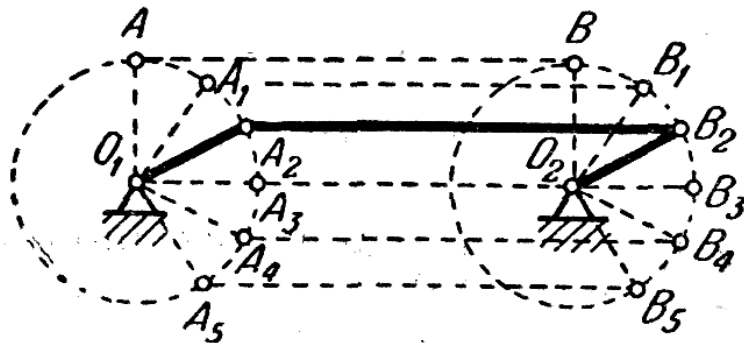


Рис. 2.6. Движение точки в рычажном механизме

Траекториями точек тела при его поступательном движении, могут быть какие угодно кривые. Термин «поступательное движение» применим только к движению тела, но не к движению одной точки. Понятие «движется, оставаясь параллельной своему начальному положению» никак не применимо к точке, не имеющей размеров.

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.

Для того чтобы осуществить вращательное движение тела, достаточно закрепить неподвижно две какие-нибудь его точки, например, при помощи подшипника A и подпятника B (рис. 2.7), тогда прямая, проходящая через эти две точки, будет осью вращения тела.

При вращательном движении тела различные его точки движутся по-разному. Однако и для вращательного движения можно отыскать такие кинематические характеристики, которые были бы общими для всех точек тела.

Пусть какое-нибудь твердое тело (рис. 2.7 в виде цилиндра) вращается вокруг неподвижной оси z . Проведем через ось вращения z неподвижную полуплоскость P и полуплоскость Q , неизменно связанную с вращающимся телом.

Угол φ между неподвижной полуплоскостью, проходящей через ось вращения, и полуплоскостью, неизменно связанной с вращающимся телом и также проходящей через ось вращения, называется углом поворота или угловым перемещением данного тела.

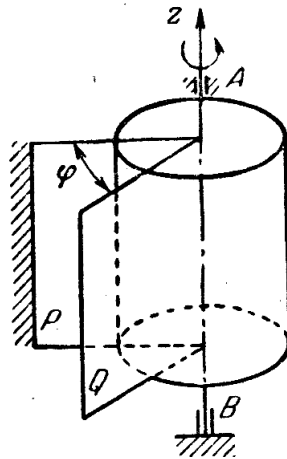


Рис. 2.7. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Установим на оси вращения z положительное направление и условимся считать угол поворота тела положительным, когда он отсчитывается от неподвижной плоскости P в сторону, противоположную ходу часовой стрелки, если смотреть на него с положительного конца оси вращения. Заданием величины и знака угла поворота вполне определяется положение полуплоскости Q и неизменно связанного с ней вращающегося тела.

При вращении тела вокруг оси z угол поворота тела изменяется с течением времени, следовательно, он является некоторой функцией времени

$$\varphi = f(t) \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19), устанавливающее зависимость между углом поворота тела и временем его движения, называется уравнением вращательного движения тела.

Угол поворота в механике обычно измеряют в отвлеченных единицах, т. е. в радианах. Иногда в практических задачах угол поворота выражают числом оборотов N тела. Так как за один оборот тело поворачивается на угол в 2π радиан, то $\varphi = 2\pi N$.

Мера изменения угла поворота тела с течением времени называется его угловой скоростью.

Пусть в момент t положение тела определяется углом поворота φ , а в момент $t + \Delta t$ углом поворота $\varphi + \Delta\varphi$.

Отношение приращения $\Delta\varphi$ угла поворота тела за некоторый промежуток времени Δt к величине этого промежутка времени называется средней за данный промежуток времени угловой скоростью тела.

Обозначая среднюю угловую скорость тела через ω_{cp} , будем иметь:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Очевидно, что угловая скорость и тела в данный момент равна пределу его средней угловой скорости за промежуток времени, начинающийся в этот момент, когда величина промежутка времени стремится к нулю:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.21)$$

Угловая скорость тела в данный момент равна производной от угла поворота тела по времени.

Значение угловой скорости тела может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, в какую сторону вращается тело. Когда тело вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, то $\Delta\varphi > 0$, $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ и угловая скорость ω положительна. Если тело вращается по часовой стрелке, то угловая скорость отрицательна. Следовательно, знак угловой скорости указывает, в какую сторону в данный момент вращается тело. Размерность угловой скорости $рад/с$ или $с^{-1}$.

На практике часто угловую скорость тела выражают не в радианах в секунду, а в оборотах в минуту. При этом обычно угловую скорость, выраженную числом оборотов в минуту, обозначают буквой n . Нетрудно найти зависимость между ω и n . Так как один оборот тела соответствует его повороту на угол в 2π радиан, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с}. \quad (2.22)$$

Нужно помнить, что в формуле (2.22) всегда ω выражается в $рад/сек$, n - в $об/мин$.

Если тело вращается неравномерно, то его угловая скорость ω изменяется с течением времени и является, следовательно, также некоторой функцией времени $\omega = f'(t)$.

Величина, характеризующая изменение угловой скорости тела с течением времени, называется его угловым ускорением.

Пусть в момент времени t тело имело угловую скорость ω , а в момент $t + \Delta t$ - угловую скорость $\omega + \Delta\omega$.

Отношение приращения $\Delta\omega$ угловой скорости тела за промежуток времени Δt к этому промежутку времени называется средним угловым ускорением тела за этот промежуток времени Δt .

Обозначая среднее угловое ускорение тела через ε_{cp} , будем иметь:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.23)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ среднее угловое ускорение приближается к пределу, называемому мгновенным угловым ускорением тела.

Обозначая угловое ускорение тела в данный момент буквой ε , будем иметь:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (2.24)$$

Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла его поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.25)$$

Если знаки угловой скорости и углового ускорения тела совпадают, то его угловая скорость увеличивается по абсолютному значению и тело, следовательно, вращается ускоренно. Если же знаки их различны, то угловая скорость уменьшается по абсолютному значению и тело вращается замедленно.

Размерность углового ускорения $рад/с^2$ или $с^{-2}$.

Тема 3. Динамика

Законы механики Галилея-Ньютона.

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном и названные им аксиомами, или законами движения (*Axiomata sive leges motus*).

1. Закон инерции

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

3. Закон равенства действия и противодействия

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4. Закон независимости действия сил

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Задачи динамики.

Первая задача динамики. Зная массу точки m и уравнения ее движения ($x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$), можем найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Эта задача легко решается следующим путем:

$$P_x = mx'', \quad P_y = my'', \quad P_z = mz'';$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2};$$

$$\cos(P, i) = \frac{P_x}{P}, \quad \cos(P, j) = \frac{P_y}{P}, \quad \cos(P, k) = \frac{P_z}{P}.$$

Вторая задача динамики. Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m , а также начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнения движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть уравнений (3.10) подставить значение массы m , а в правую часть — суммы проекций приложенных сил и полученные уравнения дважды проинтегрировать по времени.

Эта задача имеет большое практическое значение и в общем случае является более сложной, чем первая.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения движения точки появляются две постоянные, а потому при интегрировании трех дифференциальных уравнений движения точки будет шесть постоянных. Значения этих постоянных определяют по начальным условиям движения:

значениям трех координат точки и проекций ее скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно (но не обязательно) в начальный момент.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ известны координаты точки и проекции ее скорости на оси, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} t = t_0; \quad x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0; \\ x' = x'_0; \quad y' = y'_0; \quad z = z'_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Эти значения подставляют в уравнения, представляющие собой общие решения дифференциальных уравнений движения точки.

Из этих уравнений определяют постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 в зависимости от начальных координат и проекций начальной скорости. Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в общее решение дифференциальных уравнений движения точки, получают уравнения движения точки в виде уравнения 3.12:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Импульс силы. Количество движения материальной точки и механической системы.

Если постоянная по модулю и направлению сила P действует в течение промежутка времени $t = t_2 - t_1$ ее импульсом за этот промежуток времени является вектор

$$\bar{S} = \bar{P} \cdot t \quad (3.3)$$

Направление этого вектора совпадает с направлением силы, а его модуль равен произведению модуля силы на время ее действия, т. е.

$$S = P \cdot t$$

Импульс силы характеризует передачу материальной точке механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.

Импульс переменной силы $S = \int_0^t P dt$.

Модуль и направление импульса переменной силы можно определить по способу проекций.

Просуммировав проекции элементарных импульсов и перейдя к пределу, получим определенные интегралы по переменной t , представляющие собой проекции импульса S на оси координат:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} P_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} P_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} P_z dt$$

Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы m на скорость ее движения V .

Количество движения, зависящее от массы точки и ее скорости, является мерой механического движения.

Понятие количества движения было введено в механику Декартом и положено в основу механики Ньютоном. Единицей измерения количества движения является $1 \text{ кг}\cdot\text{м/с} = 1 \text{ Н}\cdot\text{с}$.

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех материальных точек этой системы.

Если отдельная точка системы M_i ($i=1, 2, \dots, n$) имеет массу m_i , и скорость V_i , то вектор количества движения системы Q

$$Q = \sum m_i V_i \quad (3.4)$$

Преобразуем выражение (3.4):

$$\begin{aligned} Q &= \sum m_i V_i = \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i \\ \sum m_i r_i &= m r_c \\ Q &= \frac{d}{dt} (m r_c) = m \frac{dr_c}{dt} = m V_c \\ Q &= m V_c \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) показывает, что *вектор количества движения механической системы имеет модуль, равный произведению массы системы на скорость ее центра масс и направление этой скорости.*

Проецируя вектор $Q = \sum m_i r_i = m r_c$ получим

$$\begin{cases} Q_x = \sum m_i V_{ix} = m V_{cx} \\ Q_y = \sum m_i V_{iy} = m V_{cy} \\ Q_z = \sum m_i V_{iz} = m V_{cz} \end{cases} \quad (3.6)$$

Проекция количества движения механической системы на каждую координатную ось, равная сумме проекций количеств движения всех точек системы на эту ось, определяется произведением массы системы на проекцию скорости центра масс на эту же ось.

Кинетический момент системы

Кинетический момент механической системы \bar{K}_O относительно неподвижного центра O является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применяются не сам вектор \bar{K}_O , а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например, K_z - кинетический момент системы относительно неподвижной оси Oz .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим

способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой m_k , имеющей скорость \vec{V}_k , кинетический момент относительно некоторой оси Oz определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z (m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times (m_k \vec{V}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения $m_k \vec{V}_k$ рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений

$$m_k \vec{V}_k = m_k \vec{V}_{kr} + m_k \vec{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z (m_k \vec{V}_k) = m_z (m_k \vec{V}_{kr}) + m_z (m_k \vec{V}_{ke}).$$

Но $V_{ke} = \omega h_e$, где h_e - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z (m_k \vec{V}_{ke}) = m_k \omega h_e \cdot h_e = m_k h_e^2 \omega.$$

Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы, широко используемое не только в механике. Сначала введем понятие об элементарной работе.

Элементарной работой силы F , приложенной в точке M (рис. 3.1), называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds, \quad (3.7)$$

где F_τ – проекция силы \vec{F} на касательную $M\tau$ к траектории точки M , направленную в сторону перемещения этой точки (или проекция \vec{F} на направление скорости \vec{V} точки M ; ds – модуль элементарного перемещения точки M .

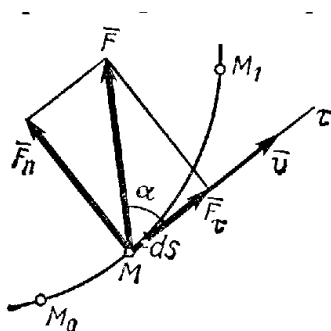


Рис. 3.1. Движение точки по траектории

Такое определение соответствует представлению о работе как о мере того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. Если разложить силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_τ и \vec{F}_n , то изменять модуль скорости будет \vec{F}_τ , так как $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dV}{dt}$ (составляющая \vec{F}_n изменяет или направление вектора \vec{V} , или при несвободном движении – силу давления на связь).

Замечая, что $F_\tau = F \cos \alpha$, где α – угол между \vec{F} и $M\tau$, получим из (3.7) другое выражение для dA :

$$dA = F ds \cos \alpha \quad (3.8)$$

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = F ds$.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^\circ$ элементарная работа $dA = -F ds$.

Если угол $\alpha = 90^\circ$, т. е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая \vec{F}_τ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая \vec{F}_τ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Если учесть, $ds = |d\vec{r}|$, где $d\vec{r}$ – вектор элементарного перемещения точки, и воспользоваться известным из векторной алгебры понятием о скалярном произведении двух векторов, то равенство (3.8) можно представить в виде

$$dA = \vec{F} d\vec{r} \quad (3.9)$$

Следовательно, элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.

Если в формуле (3.9) выразить скалярное произведение через проекции векторов \vec{F} и \vec{r} на координатные оси и учесть, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то получим аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3.10)$$

в котором x , y , z – координаты точки приложения силы F .

Мощность.

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N = dA/dt$, где t – время, в течение которого произведена работа A . В общем случае

$$N = dA/dt = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau V$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является *ватт* ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$). В технике за единицу мощности часто принимается 1 л. с, равная 736 Вт.

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт·час.

Введем понятие еще об одной основной динамической характеристике движения – о кинетической энергии. *Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $mV^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы (в СИ – 1 Дж).

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик количества движения и кинетического момента состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По этой причине они, как мы видели, не изменяют векторных характеристик количества движения и кинетического момента. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина T . Следовательно, кинетическая энергия системы будет отличаться от величин количества движения и кинетического момента еще и тем, что на её изменение влияет действие и внешних и внутренних сил.

Тема 4. Структурный и кинематический анализ плоских механизмов

Основные понятия теории механизмов и машин.

Теория механизмов и машин - научная дисциплина (или раздел науки), которая изучает строение (структуру), кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом.

Цель ТММ - анализ и синтез типовых механизмов и их систем.

Задачи ТММ: разработка общих методов исследования структуры, геометрии, кинематики и динамики типовых механизмов и их систем.

Типовыми механизмами будем называть простые механизмы, имеющие при различном функциональном назначении широкое применение в машинах, для которых разработаны типовые методы и алгоритмы синтеза и анализа.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм. Этот механизм широко применяется в различных машинах: двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и насосах, станках, ковочных машинах и прессах. В каждом варианте функционального назначения при проектировании необходимо учитывать специфические требования к механизму. Однако математические зависимости, описывающие структуру, геометрию, кинематику и динамику механизма при всех различных применениях будут практически одинаковыми. Главное или основное отличие ТММ от учебных дисциплин изучающих методы проектирования специальных машин в том, что ТММ основное внимание уделяет изучению методов синтеза и анализа, общих для данного вида механизма, независимых от его конкретного функционального назначения. Специальные дисциплины изучают проектирование только механизмов данного конкретного назначения, уделяя основное внимание специфическим требованиям. При этом широко используются и общие методы синтеза и анализ, которые изучаются в курсе ТММ.

Звено – твердое тело, входящее в состав механизма, простейший элемент механизма.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, обеспечивающее возможное движение одного относительно другого называют кинематической парой.

Классификация кинематических пар.

Кинематические пары (КП) классифицируются по следующим признакам:

1. по виду места контакта (места связи) поверхностей звеньев:
 - низшие, в которых контакт звеньев осуществляется по плоскости или поверхности (пары скольжения);
 - высшие, в которых контакт звеньев осуществляется по линиям или точкам (пары, допускающие скольжение с перекатыванием).
2. по относительному движению звеньев, образующих пару:
 - вращательные;
 - поступательные;
 - винтовые;
 - плоские;
 - сферические.

3. по способу замыкания (обеспечения контакта звеньев пары):

- силовое (за счет действия сил веса или силы упругости пружины);
- геометрическое (за счет конструкции рабочих поверхностей пары).

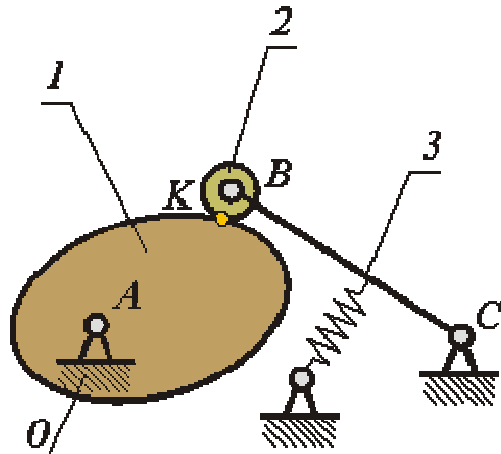


Рис. 4.1

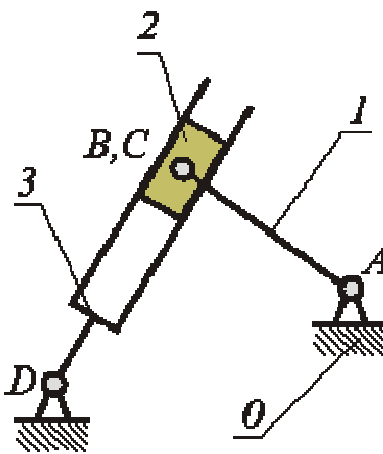


Рис. 4.2

4. по числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев (число условий связи определяет класс кинематической пары);

5. по числу подвижностей в относительном движении звеньев.

движение в КП запрещено (т.е. на данное относительное движение наложена связь).

Несколько звеньев, соединенных кинематическими парами называют кинематической цепью.

Кинематические цепи бывают плоские и пространственные, простые и сложные, открытые и замкнутые.

Основные виды механизмов.

Механизмы классифицируются по следующим признакам:

1. По области применения и функциональному назначению:

- механизмы летательных аппаратов;
- механизмы станков;
- механизмы кузнечных машин и прессов;
- механизмы двигателей внутреннего сгорания;
- механизмы промышленных роботов (манипуляторы);
- механизмы компрессоров;
- механизмы насосов и т.д.

2. по виду передаточной функции на механизмы:

- с постоянной передаточной функцией;
- с переменной передаточной функцией:
 - с нерегулируемой (синусные, тангенсные);
 - с регулируемой:
 - со ступенчатым регулированием (коробки передач);
 - с бесступенчатым регулированием (вариаторы).

3. по виду преобразования движения на механизмы преобразующие :

- вращательное во вращательное:

- редукторы $\omega_{вх} > \omega_{вых}$;
 - мультипликаторы $\omega_{вх} < \omega_{вых}$;
 - муфты $\omega_{вх} = \omega_{вых}$;
 - вращательное в поступательное;
 - поступательное во вращательное;
 - поступательное в поступательное.
4. по движению и расположению звеньев в пространстве:
- пространственные;
 - плоские;
 - сферические.

Все механизмы являются пространственными механизмами, часть механизмов, звенья которых совершают движение в плоскостях параллельных одной плоскости, являются одновременно и плоскими, другая часть механизмов, звенья которых движутся по сферическим поверхностям эквидистантным какой-либо одной сфере, являются одновременно и сферическими.

5. по изменяемости структуры механизма на механизмы:
- с неизменяемой структурой;
 - с изменяемой структурой.

В процессе работы кривошипно-ползунного механизма насоса его структурная схема все время остается неизменной. В механизмах манипуляторов в процессе работы структурная схема механизма может изменяться. Так если промышленный робот выполняет сборочные операции, например, вставляет цилиндрическую деталь в отверстие, то при транспортировке детали его манипулятор является механизмом с открытой или разомкнутой кинематической цепью. В тот момент когда деталь вставлена в отверстие, кинематическая цепь замыкается, структура механизма изменяется, подвижность уменьшается на число связей во вновь образованной кинематической паре деталь-стойка.

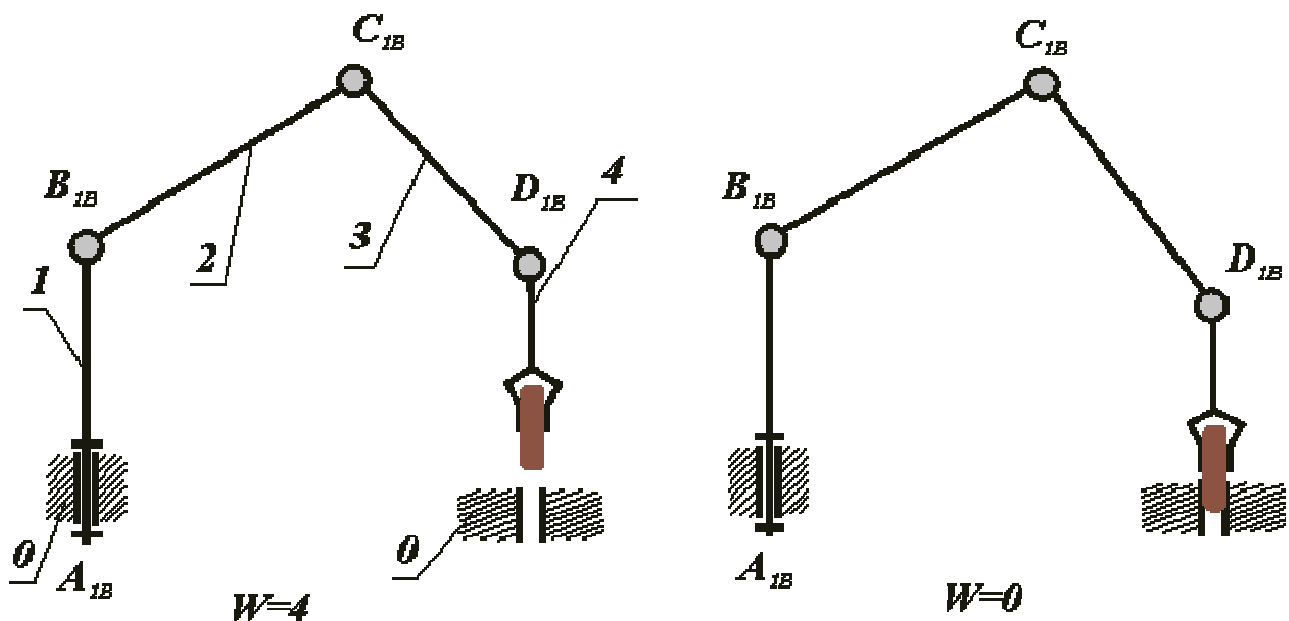


Рис.4.3

Структура манипулятора изменяется и тогда, когда в одной или нескольких кинематических парах включается тормоз. Тогда подвижное соединение двух звеньев заменяется неподвижным, два звена преобразуются в одно. На рис. 3 тормоз включен в паре С.

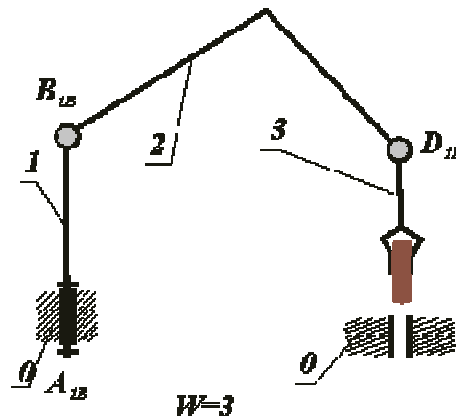


Рис. 4.4

6. по числу подвижностей механизма:
- с одной подвижностью $W=1$;
 - с несколькими подвижностями $W>1$:
 - суммирующие (интегральные);
 - разделяющие (дифференциальные).

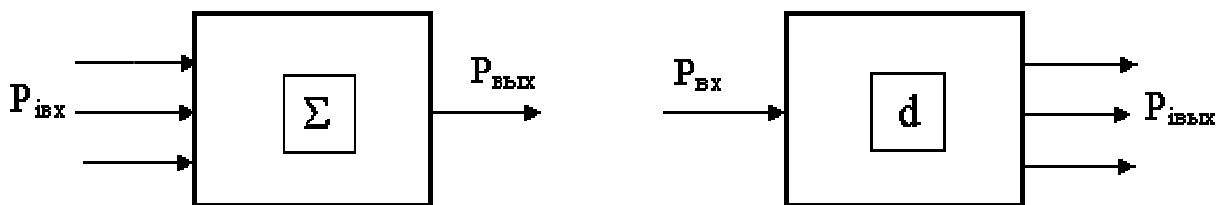


Рис. 4.5

7. по виду кинематических пар (КП):
- с низшими КП (все КП механизма низшие);
 - с высшими КП (хотя бы одна КП высшая);
 - шарнирные (все КП механизма вращательные - шарниры).
8. по способу передачи и преобразования потока энергии:
- фрикционные (сцепления);
 - зацеплением;
 - волновые (создание волновой деформации);
 - импульсные.
9. по форме, конструктивному исполнению и движению звеньев:
- рычажные;
 - зубчатые;
 - кулачковые;
 - планетарные;

- манипуляторы

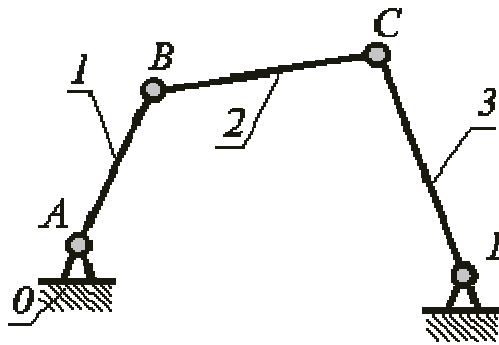


Рис. 4.6

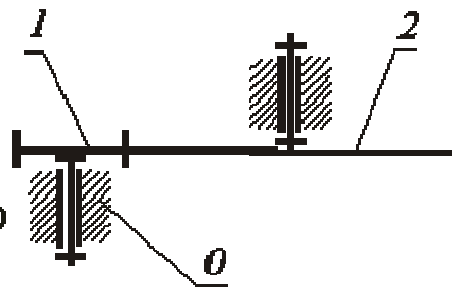


Рис. 4.7

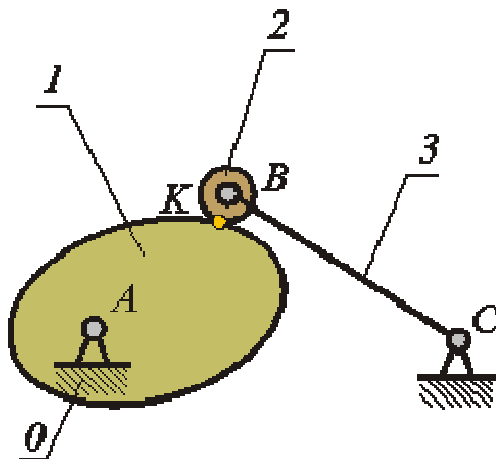


Рис. 4.8

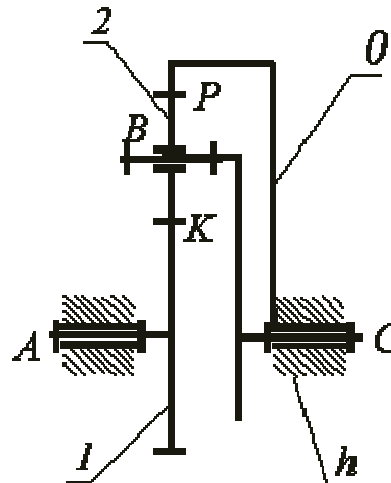


Рис. 4.9

Структурный анализ и синтез механизмов.

Структура любой технической системы определяется функционально связанной совокупностью элементов и отношений между ними. При этом для механизмов под элементами понимаются звенья, группы звеньев или типовые механизмы, а под отношениями подвижные (КП) или неподвижные соединения. Поэтому под структурой механизма понимается совокупность его элементов и отношений между ними, т.е. совокупность звеньев, групп или типовых механизмов и подвижных или неподвижных соединений. Геометрическая структура механизма полностью описывается заданием геометрической формы его элементов, их расположения, указания вида связей между ними. Структура механизма может быть на разных стадиях проектирования описываться различными средствами, с разным уровнем абстрагирования: на функциональном уровне - функциональная схема, на уровне звеньев и структурных групп - структурная схема и т.п. Структурная схема - графическое изображение механизма, выполненное с использованием условных обозначений рекомендованных ГОСТ (см. например ГОСТ 2.703-68) или принятых в специальной литературе, содержащее информацию о числе и расположении элементов (звеньев, групп), а также о виде и классе кинематических пар, соединяющих эти элементы. В отличие от кинематической схемы механизма,

структурная схема не содержит информации о размерах звеньев и вычерчивается без соблюдения масштабов. (Примечание: кинематическая схема - графическая модель механизма, предназначенная для исследования его кинематики.)

Понятие о структурном синтезе и анализе.

Как на любом этапе проектирования при структурном синтезе различают задачи синтеза и задачи анализа.

Задачей структурного анализа является задача определения параметров структуры заданного механизма - числа звеньев и структурных групп, числа и вида КП, числа подвижностей (основных и местных), числа контуров и числа избыточных связей.

Задачей структурного синтеза является задача синтеза структуры нового механизма, обладающего заданными свойствами: числом подвижностей, отсутствием местных подвижностей и избыточных связей, минимумом числа звеньев, с парами определенного вида (например, только вращательными, как наиболее технологичными) и т.п.

Основные понятия структурного синтеза и анализа.

Подвижность механизма - число независимых обобщенных координат однозначно определяющее положение звеньев механизма на плоскости или в пространстве.

Связь - ограничение, наложенное на перемещение тела по данной координате.

Избыточные (пассивные) - такие связи в механизме, которые повторяют или дублируют связи, уже имеющиеся по данной координате, и поэтому не изменяющие реальной подвижности механизма. При этом расчетная подвижность механизма уменьшается, а степень его статической неопределимости увеличивается. Иногда используется иное определение: Избыточные связи - это связи число которых в механизме определяется разностью между суммарным числом связей, наложенных кинематическими парами, и суммой степеней подвижности всех звеньев, местных подвижностей и заданной (требуемой) подвижностью механизма в целом.

Местные подвижности - подвижности механизма, которые не оказывают влияния на его функцию положения (и передаточные функции), а введены в механизм с другими целями (например, подвижность ролика в кулачковом механизме обеспечивает замену в высшей паре трения скольжения трением качения).

Основные структурные формулы.

Основные структурные формулы были составлены для плоских механизмов Чебышевым П.Л. и Грюблером М., для пространственных - Сомовым П.О. и Малышевым. Так как принципы заложенные в построение всех этих формул одинаковы, то их можно записать в обобщенном виде:

$$W = H \cdot n + \sum_{i=1}^{H-1} (H-i) \cdot p_i, \quad (4.1)$$

где: H - число степеней подвижности твердого тела (соответственно при рассмотрении механизма в пространстве $H=6$, на плоскости $H=3$);
 n - число подвижных звеньев в механизме; $n = k - 1$;
 k - общее число звеньев механизма (включая и неподвижное звено - стойку);
 i - число подвижностей в КП;
 p_i - число кинематических пар с i подвижностями.

Структурной группой Ассура (или группой нулевой подвижности) называется кинематическая цепь, образованная только подвижными звеньями механизма, подвижность которой (на плоскости и в пространстве) равна нулю ($W_{zp} = 0$).

Конечные звенья групп Ассура, входящие в две кинематические пары, из которых одна имеет свободный элемент звена, называются поводками. Группы могут быть различной степени сложности. Структурные группы Ассура делятся на классы в зависимости от числа звеньев, образующих группу, числа поводков в группе, числа замкнутых контуров внутри группы. В пределах класса (по Ассуру) группы подразделяются по числу поводков на порядки (порядок группы равен числу ее поводков). Механизмы классифицируются по степени сложности групп входящих в их состав. Класс и порядок механизма определяется классом и порядком наиболее сложной из входящих в него групп. Особенность структурных групп Ассура - их статическая определимость. Если группу Ассура свободными элементами звеньев присоединить к стойке, то образуется статически определимая ферма. Используя группы Ассура удобно проводить структурный, кинематический и силовой анализ механизмов.

Тема 5. Простые виды деформаций

Основные понятия.

Сопротивление материалов – наука, в которой изложены принципы и методы расчета частей сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – способность конструкции выдерживать заданные нагрузки без разрушения.

Жесткость – способность детали воспринимать заданные внешние нагрузки, не изменяя свои первоначальные формы и размеры выше норм установленных на основе условий её нормальной работы.

Устойчивость – способность конструкции сохранять первоначальную форму равновесия.

В отличие от теоретической механики, в сопротивлении материалов рассматриваются задачи, в которых все тела принимаются деформируемыми, то есть способными изменять первоначальную форму и размеры при действии на них внешних сил. Деформации, полностью исчезающие после нагрузок, называют *упругими*, а остающиеся – пластическими или остаточными. Материал называется абсолютно упругим, если после прекращения действия на него внешних сил полностью исчезают вызванные силами деформации. В целях создания простых и удобных для инженерной практики расчетов используются различные приближенные методы, которые заставляют прибегать к допущениям и гипотезам о свойствах материалов и характере деформации.

Основные допущения о свойствах материалов:

- 1) Гипотеза сплошности и однородности материала. По этой гипотезе предполагается, что материал полностью заполняет весь объем без каких либо пустот и свойства материала не зависят от величины выделенного из тела объема.
- 2) Гипотеза изотропности. Сплошная среда является изотропной, то есть физико-механические свойства материалов во всех направлениях одинаковы. Материалы, не обладающие указанным свойством, называются анизотропными. Анизотропно дерево, бумага, фанера.
- 3) Гипотеза идеальной упругости. До определенных пределов нагружения материал является идеально упругим. При больших нагрузках все материалы перестают обладать этим свойством, а поэтому данная гипотеза становится неприменимой.

Допущения связанные с характером деформаций.

- 1) Гипотеза малости деформаций. Перемещения возникающие в упругих телах под воздействием внешних сил, малы по сравнению с размером тела. Эта гипотеза позволяет при составлении уравнений равновесия не учитывать изменения в расположении сил. Указанное допущение носит название принципа начальных размеров. Проиллюстрируем данное положение простым примером. Момент силы F относительно точки A заделки считают равным Fl , а не Fl_1 , так как разница между l и l_1 незначительна.
- 2) Гипотеза линейности деформаций. Перемещения точек упругого тела прямо

пропорциональны действующим нагрузкам. Суть допущения покажем на примере. Если балка при действии силы F прогнется на величину f , то вдвое большая сила вызовет прогиб балки в два раза больший – $2f$. Тела, для которых справедлива указанная гипотеза называются линейно деформируемыми.

3) Принцип независимости действия сил. Результат действия на тело системы сил не зависит от порядка приложения внешних сил и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности. Пусть на тело действует две силы F_1 и F_2 при этом точка A балки получит перемещение f . Если к балке приложить силу F_1 точка A получит перемещение f_1 , при действии силы F_2 – перемещение f_2 . При одновременном действии обеих сил перемещение точки A равно алгебраической сумме перемещений f_1 и f_2 : $f=f_1+f_2$

Указанный принцип носит название суперпозиции, и он справедлив лишь для линейно деформируемых тел.

В сопротивлении материалов исследование вопроса о прочности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету, необходимо выделить самое существенное для рассматриваемого элемента, отбросив частности, несущественные для решения, но значительно его усложняющие, то есть создать расчетную схему элементов.

Расчетная схема – это реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей.

По геометрическим признакам все реальные тела могут быть отнесены к таким расчетным схемам: брус, оболочка, пластина и массивное тело. Для того, чтобы рассчитываемый элемент отнести к одной из указанных схем, необходимо знать геометрические признаки каждого из них.

Брус – тело, один размер которого – длина – значительно двух других – ширины и толщины. По виду оси брус могут быть прямыми и кривыми. Если сечение изменяется по длине бруса, то он называется бруском переменного сечения.

Оболочка – тело, один размер которого – толщина – значительно меньше двух других – радиуса кривизны и длины.

Пластину можно рассматривать как частный случай оболочки бесконечно большого радиуса кривизны.

Массив – тело, все размеры которого соизмеримы.

Центральное растяжение-сжатие.

Под *растяжением (сжатием)* понимают такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникает лишь один внутренний силовой фактор - продольная сила N_z . Поскольку продольная сила численно равна сумме проекций, приложенных к одной из отсеченных частей внешних сил на ось стержня (для прямолинейного стержня она совпадает в каждом сечении с осью O_z), то растяжение (сжатие) имеет место, если все внешние силы, действующие по одну сторону от данного поперечного сечения, сводятся к равнодействующей, направленной вдоль оси стержня. Одна и та же продольная сила N_z при действии на различные части стержня (левую или правую) имеет противоположные

направления. Знак N_z зависит от характера вызываемой ею деформации. Продольная сила считается положительной, если вызывает растяжение элемента, и она отрицательна, если вызывает сжатие.

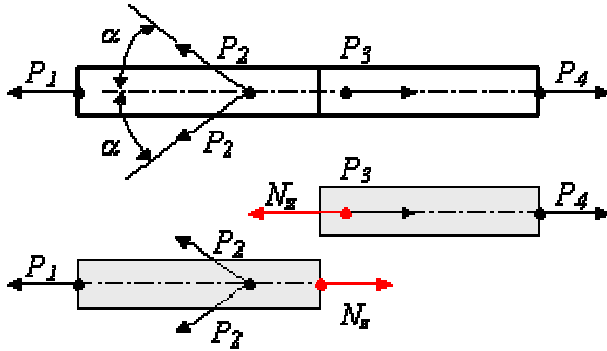


Рис. 5.1

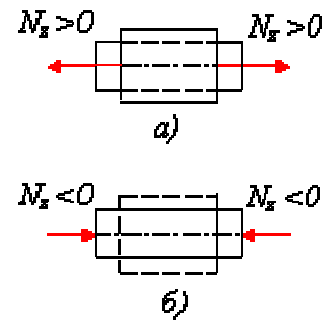


Рис. 5.2

Для того, чтобы сформулировать предпосылки теории растяжения (сжатия) призматического стержня, обратимся к эксперименту. Представим себе стержень, изготовленный из какого-либо податливого материала (например, резины), на боковую поверхность которого нанесена система продольных и поперечных рисок. Эта ортогональная система рисок остается таковой и после приложения растягивающей нагрузки. Поскольку поперечные риски являются следами поперечных сечений на поверхности стержня и остаются прямыми и перпендикулярными к оси стержня то это свидетельствует о выполнении *гипотезы плоских сечений (Бернулли)*. С учетом *гипотезы об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон* приходим к выводу, что деформация растяжения стержня сводится к одноосному растяжению его продольных волокон, и в поперечном сечении стержня возникают лишь нормальные напряжения σ , индекс z у которых опускаем. Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а, следовательно, и связанных с ними касательных напряжений τ в поперечных и продольных сечениях стержня.

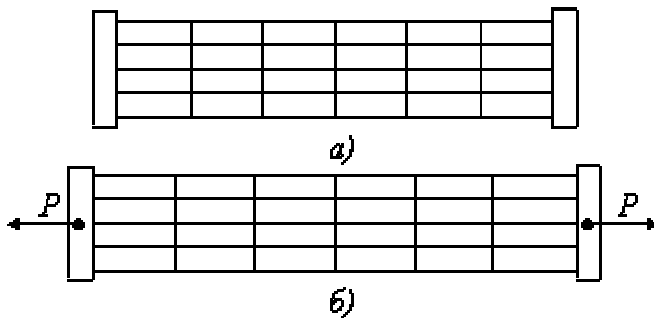


Рис. 5.3

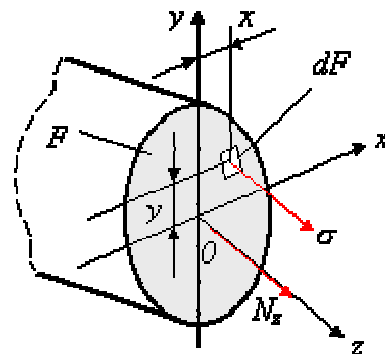


Рис. 5.4

Тогда продольная сила N^z равная сумме проекции внутренних сил, действующих в данном поперечном сечении площадью F (рис. 5.4) очевидно будет равна

$$N_z = \int_F \sigma dF \quad (5.1)$$

Это соотношение является уравнением равновесия статики, связывающим продольную силу N_z , и нормальное напряжение σ , которое в общем случае является функцией координат x и y и поэтому не может быть найдено из одного лишь 1 уравнения статики. Таким образом, задача определения напряжений даже в самом простом случае деформирования стержня (растяжении или сжатии) оказывается статически неопределимой.

Необходимое для решения этой задачи дополнительное уравнение вытекает из гипотезы плоских сечений. Поскольку поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси стержня, в процессе деформирования лишь поступательно перемещаются вдоль оси стержня (что приводит к одинаковому удлинению всех продольных волокон), то приходим к уравнению $\varepsilon = \text{const}$, из которого ввиду однозначности связи σ и ε (для линейно-упругого материала это - закон Гука: $\sigma = E\varepsilon$.) вытекает, что

$$\sigma = \text{const.}$$

Решая совместно уравнения получим, что $N_z = \sigma F$ или

$$\sigma = N_z / F.$$

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, а касательные напряжения в сечениях отсутствуют, что является следствием гипотезы плоских сечений. Указанное, несмотря на, казалось бы, очевидность и простоту, является фундаментальным результатом, справедливым, строго говоря, лишь для призматического стержня. Однако в инженерной практике его используют и для приближенной оценки нормальных напряжений в стержнях переменного сечения. При этом, чтобы погрешность формулы была невелика, необходимо, чтобы площадь поперечного сечения стержня изменялась достаточно плавно вдоль его оси.

Условие прочности при растяжении (сжатии) призматического стержня для стержня из пластического материала (т. е. материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие) будет иметь вид:

$$\sigma = N_z / F \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение. Напряжение σ в условии подставляется по модулю, так как знак σ в этом случае роли не играет. Для стержней из хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, знак напряжения имеет принципиальное значение, и условие прочности приходится формулировать отдельно для растяжения и сжатия:

$$\sigma_p = N_z / F \leq [\sigma_p],$$

$$|\sigma_c| = |N_z| / F \leq [\sigma_c],$$

где σ_p и σ_c - напряжения растяжения и сжатия, а $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ - соответствующие им допускаемые напряжения.

В практике инженерных расчетов, исходя из условия прочности, решаются три основные задачи механики материалов конструкций. В применении к случаю

растяжения (сжатия) призматического стержня эти задачи формулируются следующим образом.

Проверка прочности (проверочный расчет). Этот расчет проводится, если нагрузка (в нашем случае ее представляет N_z), сечение стержня F и его материал $[\sigma]$ заданы.

Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности:

$$\sigma = N_z / F \leq [\sigma] ,$$

Проверочный расчет заключается в том, что определяется фактический коэффициент запаса прочности n и сравнивается с нормативным коэффициентом запаса $[n]$:

$$n = \frac{\sigma^*}{\sigma} = \frac{\sigma^* F}{N_z} \geq [n] ,$$

где σ^* - предельное (или опасное) напряжение, т. е. напряжение, вызывающее отказ элемента конструкции (напомним, что, например, для стержня из пластичного материала это-предел текучести σ_t или условный предел текучести $\sigma_{0,2}$).

Подбор сечения (проектный расчет). В этом расчете по Заданной нагрузке (N_z) определяются размеры поперечного сечения стержня (F) из заданного материала ($[\sigma]$ дано). Минимальное значение F получим, если в условии прочности принять знак равенства:

$$[F] = N_z / [\sigma] \quad (5.3)$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции (F и $[\sigma]$ даны) при выполнении условия прочности:

$$[N] = [\sigma] F.$$

Закон Гука.

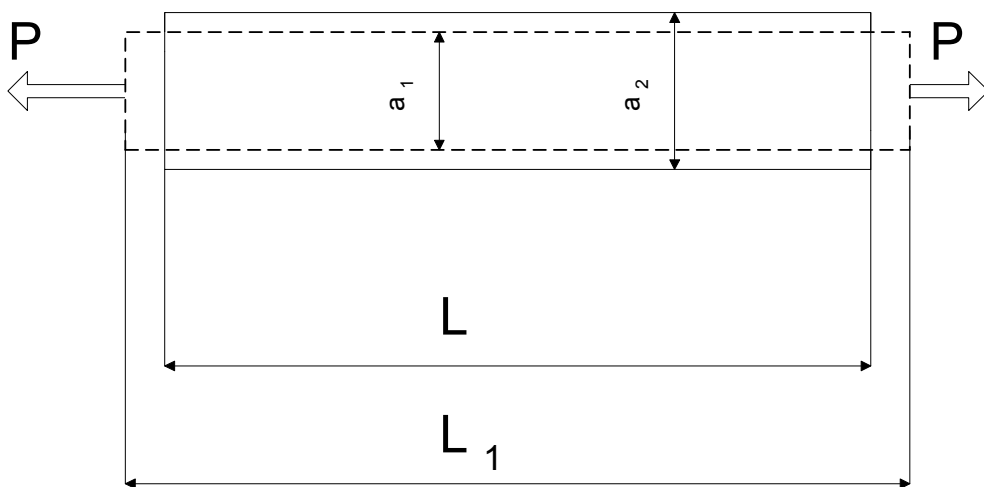


Рис. 5.5

Пусть первоначальная длина растянутого стержня равна L , а длина после деформации L_1 . Приращение длины $\Delta L = L_1 - L$ — называется абсолютным

удлинением стержня, а отношение $\Delta L / L = \varepsilon$ – называется относительным удлинением. Из множества опытов установлена следующая зависимость, которая получила название Закон Гука:

$$\varepsilon = \sigma / E,$$

где σ – нормальное напряжение,

E – модуль упругости первого рода или модуль Юнга.

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив закон Гука - нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации ε $\sigma = E\varepsilon$.

Коэффициент пропорциональности E - модуль продольной упругости, его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки.

Средние значения E и μ для некоторых материалов даны в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Значения модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν

Материал	E , МПа	ν
Сталь	$(2-2.2) \cdot 10^5$	0.24-0.3
Титан	$1.1 \cdot 10^5$	0.25
Алюминий	$0.7 \cdot 10^5$	0.32-0.36
Медь	$1.0 \cdot 10^5$	0.31-0.34
Чугун	$(1.1-1.6) \cdot 10^5$	0.23-0.27
Резина	1.0-0.8	0.5
Пробка	-	0
Стекловолокно	$(0.18-0.4) \cdot 10^5$	0.25
Дерево	$1 \cdot 10^4$	-

$$\Delta L = NL / ES, \quad (5.4)$$

где N – продольная сила,

S – площадь сечения,

L – длина стержня,

E – модуль Юнга.

Сдвиг.

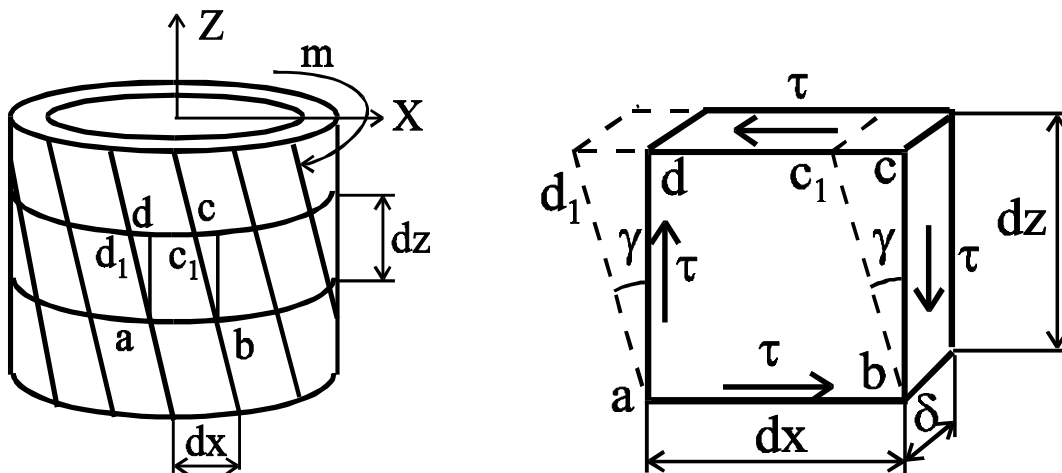


Рис. 5.6

Напряженное состояние, при котором на гранях прямоугольного элемента возникают только касательные напряжения τ , называется **чистым сдвигом**. Экспериментально чистый сдвиг может быть осуществлен при кручении тонкостенной трубы (рис. 5.6).

Рассмотрим элемент $abcd$, вырезанный из тонкостенной трубы. При возникновении касательных напряжений элемент перекашивается. Если считать грань ab закрепленной, то грань cd сдвинется в положение c_1d_1 . Все прямые углы между гранями изменятся на величину γ , который называется **углом сдвига**. Касательные напряжения и угол сдвига связаны прямой пропорциональностью, т.е. законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (5.5)$$

где G - модуль сдвига (модуль упругости второго рода); для стали $G = 8 \cdot 10^4$ Мпа.

Между модулем упругости E и G существует связь:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \text{ которая подтверждается экспериментально.}$$

Здесь μ - коэффициент Пуассона.

Кручение.

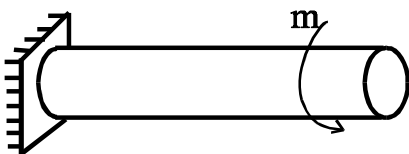


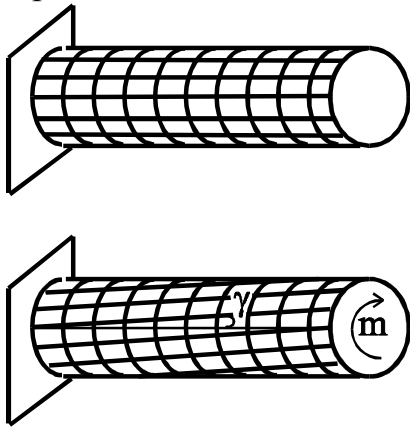
Рис. 5.7.

Деформация кручения вызывается скручивающими моментами, плоскости действия которых перпендикулярны продольной оси (рис. 2.7).

При кручении возникает один внутренний силовой фактор - крутящий момент M_k .

Характер распределения напряжений по сечению выясним, рассмотрев геометрическую картину деформации вала.

Для этого на поверхности нанесем сетку, состоящую из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги.



После приложения скручивающего момента наблюдаем следующее: образующие цилиндра превращаются в линии одинакового наклона к оси стержня; параллельные круги не искривляются и расстояние между ними остается неизменным, радиусы, проведенные в торцевых сечениях, остаются прямыми (рис. 5.8). Таким образом, при построении теории напряженно-деформированного состояния вала при кручении пользуются следующими гипотезами:

Рис. 5.8

1. Поперечные сечения вала остаются при деформации плоскими и перпендикулярными к оси вала. Они лишь поворачиваются одно относительно другого на некоторый угол закручивания, обозначаемый φ . (гипотеза плоских сечений).

2. Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными.

3. Радиусы, проведенные в поперечных сечениях, при деформации не искривляются.

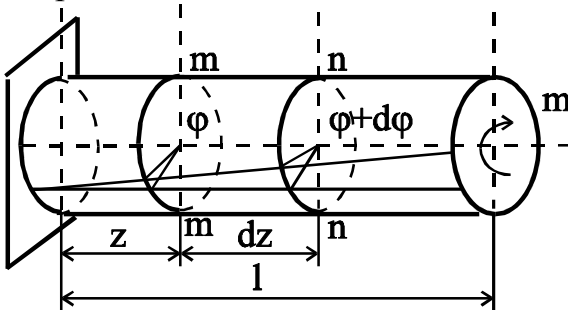


Рис. 5.9

Рассмотрим некоторый участок вала длиной dz , выделенный из вала. Пусть угол поворота сечения $m-m$ относительно неподвижного будет φ , тогда угол поворота сечения $n-n$, расположенного на расстоянии dz , будет $\varphi + d\varphi$. Следовательно, угол закручивания участка вала длиной dz равен $d\varphi$.

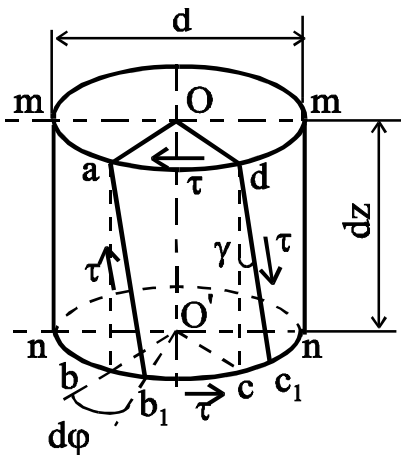


Рис. 5.10

Рассмотрим деформацию прямоугольного элемента $abcd$ бесконечно малой толщины, выделенного у поверхности вала (рис. 5.10). Так как радиусы остаются прямыми, то отрезок $O'b$ поворачиваясь в плоскости поперечного сечения на угол закручивания $d\varphi$, займет положение $O'b_1$. При этом образующая ab переместится в новое положение ab_1 , составив с первоначальной угол γ . Аналогично образующая dc переместится в положение dc_1 . Так как длины этих отрезков практически неизменны, то деформация прямоугольного элемента $abcd$ состоит в изменении первоначально прямых углов на величину угла γ .

Таким образом, рассмотренный элемент находится в условиях чистого сдвига и, следовательно, на его гранях действуют касательные напряжения τ .

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb_1}{ab} \approx \gamma.$$

Учитывая, что $ab = dz$, а $bb_1 = r \cdot d\varphi$, угол сдвига: $\gamma = r \frac{d\varphi}{dz}$.

Отношение $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$ называется относительным погонным углом закручивания $\left[\frac{1}{\text{м}} \right]$ или $\left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]$.

$$\gamma = \theta \cdot r$$

Если рассмотреть деформацию прямоугольного элемента, расположенного внутри вала на произвольной цилиндрической поверхности радиуса ρ , то угол сдвига $\gamma_\rho = \theta \rho$.

Найдем зависимость между напряжениями и деформациями при кручении. С учетом закона Гука при чистом сдвиге

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Из двух последних формул следует, что углы сдвига и касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ точек от центра сечения.

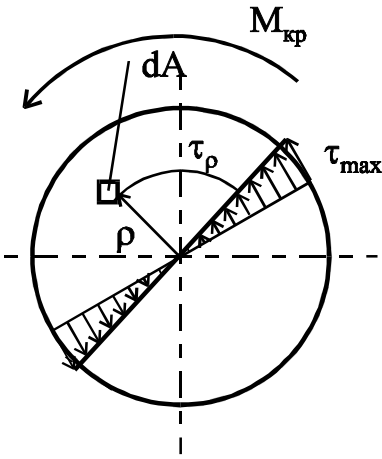


Рис. 5.11

Очевидно, что максимальные касательные напряжения τ_{\max} будут возникать у поверхности вала, то есть при $\rho = r$.

$$\tau_r = \tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot r.$$

Выделим на расстоянии ρ от центра сечения элементарную площадку dA (рис. 5.11). Крутящий момент M_k :

$$M_k = \int_A \tau_\rho \rho dA = G \cdot \theta \int_A \rho^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p.$$

Отсюда погонный угол закручивания

$$\theta = \frac{M_k}{G \cdot I_p}.$$

практически Выражение $G \cdot I_p$ - жесткость вала при кручении.

I_p - полярный момент инерции.

$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$ - для круглого сечения; $I_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2}$ - для трубчатого сечения.

Взаимный угол закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии l :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} dz.$$

Если в пределах цилиндрического участка вала длиной l крутящий момент M_k имеет постоянное значение, то

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_k l}{G \cdot I_p} \quad - \text{закон Гука при кручении.}$$

Так как $\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$, то
$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho.$$

Максимальные касательные напряжения, действующие по контуру сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k r}{I_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (5.6)$$

где $W_p = \frac{I_p}{r}$ - полярный момент сопротивления $[\text{ед}^3]$.

$$W_p = \frac{\pi \cdot r^3}{2} \quad - \text{ для круглого сечения; } \quad W_p = \frac{\pi \cdot (r_H^4 - r_B^4)}{2 \cdot r_H} \quad - \text{ для трубчатого сечения.}$$

Тема 6. Прямой поперечный изгиб

При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y (рис. 5.1), которые связаны с нормальными σ и касательными τ_{yz} напряжениями

$$M_x = \int_F \sigma y dF, \quad Q_y = \int_F \tau_{yz} dF.$$

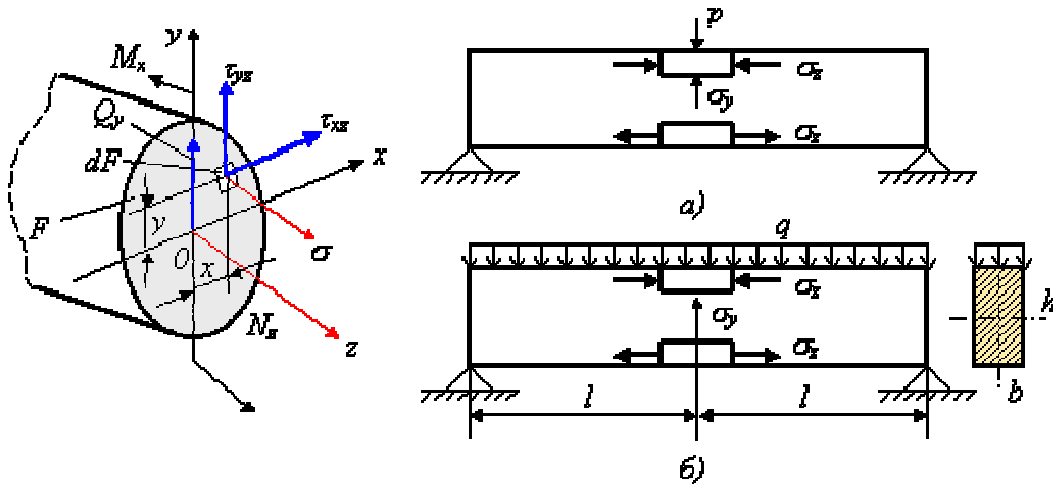


Рис. 5.1 Изгиб балки

Выведенная в случае чистого изгиба стержня формула для прямого поперечного изгиба, вообще говоря, неприменима, поскольку из-за сдвигов, вызываемых касательными напряжениями τ_{yz} , происходит деформация поперечных сечений (отклонение от закона плоских сечений). Однако для балок с высотой сечения $h < l/4$ (рис. 5.1) погрешность невелика и ее применяют для определения нормальных напряжений поперечного изгиба как приближенную. При выводе условия прочности при чистом изгибе использовалась гипотеза об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон. При поперечном изгибе наблюдаются отклонения от этой гипотезы:

а) в местах приложения сосредоточенных сил. Под сосредоточенной силой напряжения поперечного взаимодействия могут быть достаточно велики и во много раз превышать продольные напряжения σ_z , убывая при этом, в соответствии с принципом Сен-Венана, по мере удаления от точки приложения силы;

б) в местах приложения распределенных нагрузок. Так, в случае, приведенном на рис. 5.1, б напряжения от давления на верхние волокна балки $\sigma_y = -q/b$. Сравнивая их с продольными напряжениями σ_z , имеющими порядок

$$\sigma_z \approx \max \sigma_z = \frac{ql^2/8}{bh^2/6} = \frac{3q}{4b} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \approx \frac{q}{b} \left(\frac{l}{h} \right)^2$$

приходим к выводу, что напряжения $\sigma_y \ll \sigma_z$ при условии, что $h^2 \ll l^2$, так как $\sigma_y / \sigma_z \approx (h/l)^2 \ll 1$.

Получим формулу для касательных напряжений τ_{yz} . Примем, методика расчета нормальных напряжений известна, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения (рис. 5.2). Эта предпосылка выполняется тем точнее, чем уже поперечное сечение стержня. Точное решение задачи для прямоугольного поперечного сечения показывает, что отклонение от равномерного распределения τ_{yz} , зависит от отношения сторон b/h . При $(b/h)=1,0$ оно составляет 12,6%, при $(b/h)=0,5$ - только 3,3%.

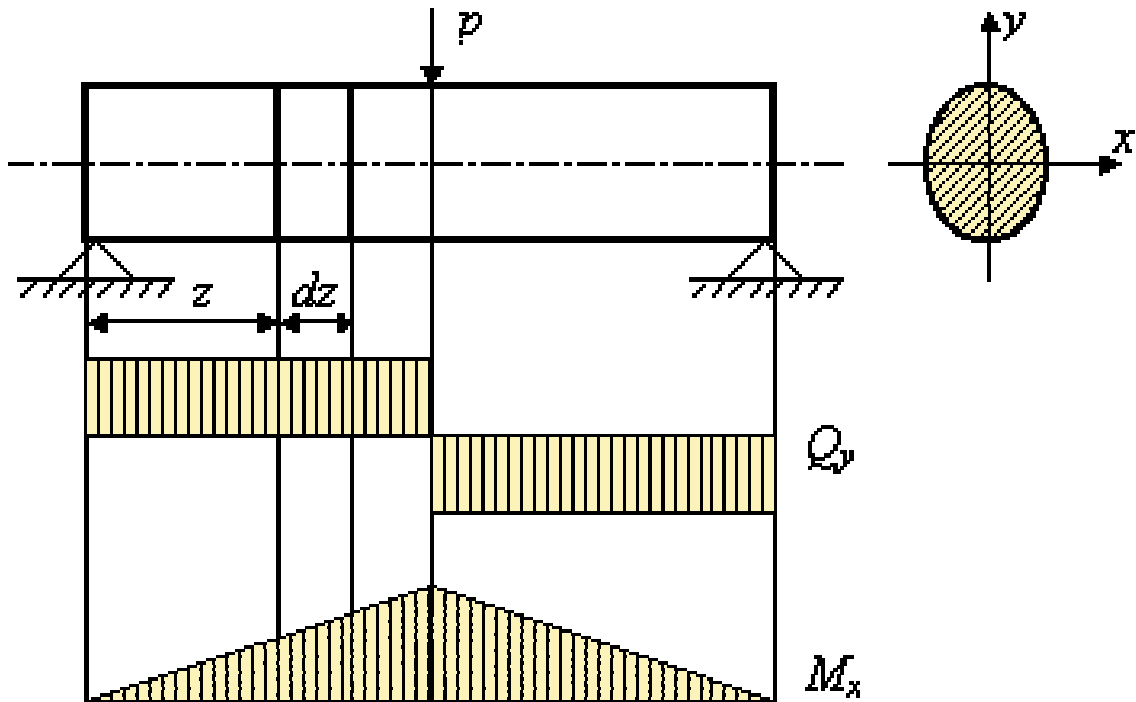


Рис. 5.2 Эпюры внутренних сил при изгибе

Непосредственное определение напряжений τ_{yz} затруднительно, поэтому находим равные им (вследствие закона парности) касательные напряжения τ_{yz} , возникающие на продольной площадке с координатой y элемента длиной dz , вырезанного из балки, (рис. 5.2). Сам элемент показан на рис. 5.3. От этого элемента продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на y , отсекаем верхнюю часть, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями τ (индекс yz в дальнейшем опускаем), равнодействующая которых $dT = \tau b dz$. Здесь, согласно второй предпосылке $\tau = \text{const}$ по ширине элемента b . Нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$, действующие на торцевых площадках элемента, также заменим их равнодействующими:

$$N_w = \int_{\omega} \sigma dF = \int_{\omega} \frac{M_x}{J_x} y dF = \frac{M_x}{J_x} S_x^w$$

$$N_w + dN_w = \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dF = \frac{M_x + dM_x}{J_x} S_x^w$$

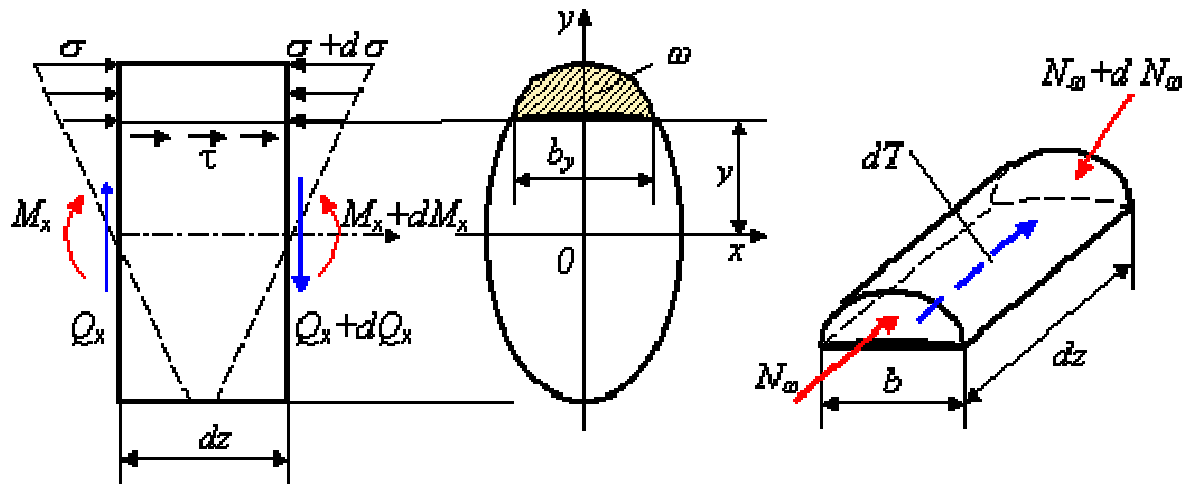


Рис. 5.3

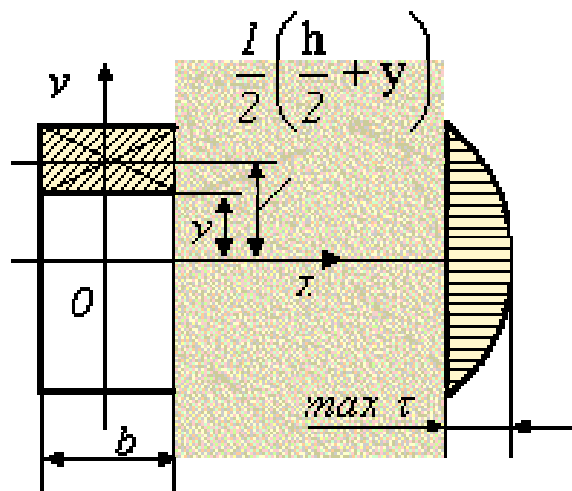


Рис. 5.4

Согласно первой предпосылке нормальные напряжения определяются уже

известным способом, $S_x^\omega = \int_F y dF$, где S_x^ω - статический момент отсеченной части площади поперечного сечения ω относительно оси Ox .

Рассмотрим условие равновесия элемента (рис. 5.4) составив для него уравнение статики $\Sigma z = 0$:

$$N_\omega + dT - (N_\omega + dN_\omega) = 0,$$

откуда после несложных преобразований, учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y,$$

получаем формулу для касательных напряжений при нормальном поперечном изгибе призматического стержня

$$\tau = \frac{Q_y S_x^\omega}{J_x b_y}.$$

которая называется формулой Журавского. В этой формуле b_y - ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения, а статический момент, подставляемый в эту формулу, может быть вычислен как для верхней, так и для нижней части (статические моменты этих частей сечения относительно его центральной оси Ox отличаются только знаком, так как статическим момент всего сечения равен нулю).

Покажем, что доминирующая роль в расчетах на прочность балки, подвергнутой поперечному изгибу, будет принадлежать расчету по нормальным напряжениям. Для этого оценим порядок $\max \sigma$ и $\max \tau$ на примере консольной балки:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \approx \frac{Pl}{h^3}, \quad \max \tau \approx \frac{Q_y}{F} \approx \frac{P}{h^2},$$

так как $M_x \approx Pl$, $Q_y \approx P$, $F \approx h^2$, $W_x \approx h^3$. Тогда

$$\frac{\max \tau}{\max \sigma} \approx \frac{Pl/h^2}{Pl/h^3} = hl \ll 1,$$

откуда $\max \tau \ll \max \sigma$, а поскольку $[\tau]/[\sigma] \approx 0,5$ то доминирующим в этом случае будет расчет по нормальным напряжениям и условие прочности, например, для балки из пластичного материала, работающей на прямой изгиб, как и в случае чистого изгиба будет иметь вид

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

Рациональные формы поперечных сечений при изгибе

Наиболее рациональным следует признать сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке (изгибающем моменте) на балку. В этом случае расход материала на изготовление балки, будет минимальным. Для получения балки минимальной материалоемкости нужно стремиться к тому, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равных допускаемым или близким к ним. Прежде всего рациональное сечение балки при изгибе должно удовлетворять условию равнопрочности растянутой и сжатой зон балки. Иными словами необходимо, чтобы наибольшие напряжения растяжения ($\max \sigma_p$) и наибольшие напряжения сжатия ($\max \sigma_c$) одновременно достигали допускаемых напряжений $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$.

Поэтому для балки из пластичного материала (одинаково работающего на растяжение и сжатие: $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$), условие равнопрочности выполняется для сечений, симметричных относительно нейтральной оси. К таким сечениям относится, например, прямоугольное сечение (рис. 7.16, а), при котором обеспечено условие равенства $\max \sigma_p = \max \sigma_c$. Однако в этом случае материал, равномерно распределенный по высоте сечения, плохо используется в зоне нейтральной оси. Чтобы получить более рациональное сечение, необходимо возможно большую часть материала переместить в зоны, максимально удаленные от нейтральной оси. Таким образом, приходим к рациональному для пластичного

материала сечению в форме симметричного двутавра (рис. 5.5, б), у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках (горизонтальных массивных листах), соединенных стенкой (вертикальным листом), толщина которой (δ) назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям, а также из соображений ее устойчивости. К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение (рис. 5.5, в).

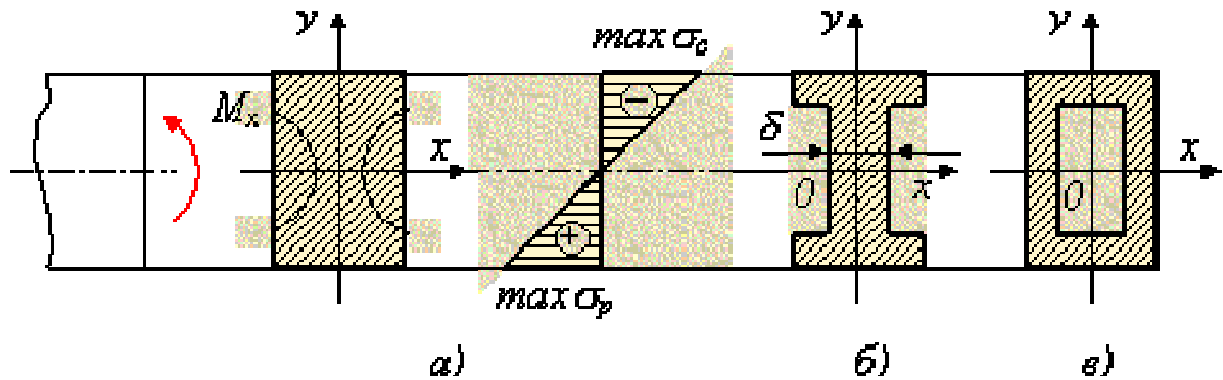


Рис. 5.5 Распределение напряжений в поперечном сечении балки

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра, удовлетворяющего условию равнопрочности на растяжение и сжатие (рис. 5.6):

$$\frac{y_{\max}^{(p)}}{y_{\max}^{(c)}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]},$$

которое вытекает из требования

$$\frac{\max \sigma_p}{\max \sigma_c} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}.$$

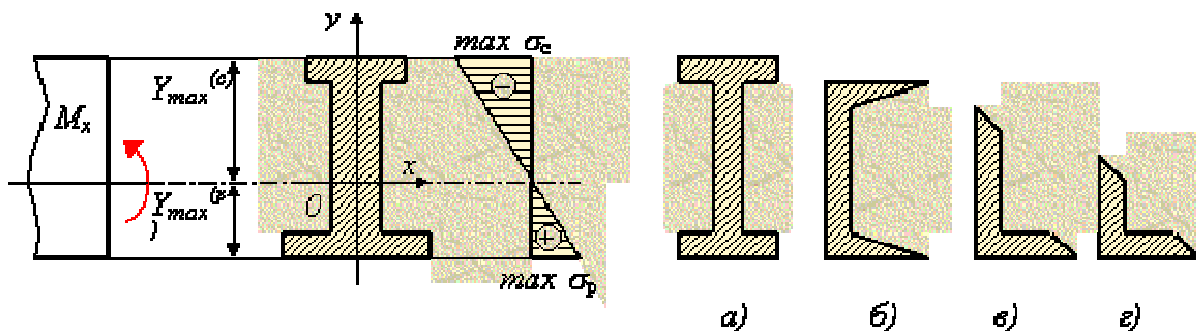


Рис. 5.6 Формы профилей балок

Идея рациональности поперечного сечения стержней при изгибе реализована в стандартных тонкостенных профилях, получаемых методами горячего прессования или прокатки из рядовых и легированных конструкционных высококачественных сталей, а также алюминия и алюминиевых сплавов,

получивших широкое распространение в строительстве, машиностроении, авиационном машиностроении. Широко распространены показанные на рис. 5.6: *а* - двутавр, *б* - швеллер, *в* - неравнобокий уголок, *г*-равнобокий уголок. Реже встречаются тавр, таврошвеллер, зетовый профиль и др. Употребляются также холодногнутые замкнутые сварные профили.

Поскольку по соображениям технологии сортамент стандартных профилей по размерам ограничен (например, наибольший прокатный двутавр согласно ГОСТ 8239-72 имеет высоту 550 мм), то для больших пролетов приходится применять составные (сварные или клепаные) балки.

Тема 7. Сложное сопротивление

Внецентренное растяжение-сжатие.

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к отброшенной части стержня, направлена параллельно оси стержня, но не совпадает с этой осью (рис. 7.1).

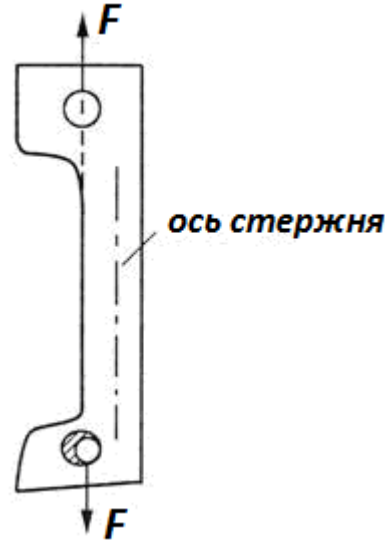


Рис. 7.1 Внецентренное растяжение детали

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.

Представим, что после проведения разреза равнодействующая F сил действующих на отброшенную часть и приложенная к оставшейся проходит через точку с координатами $(x_F; y_F)$ в главных центральных осях поперечного сечения (рис. 7.2).

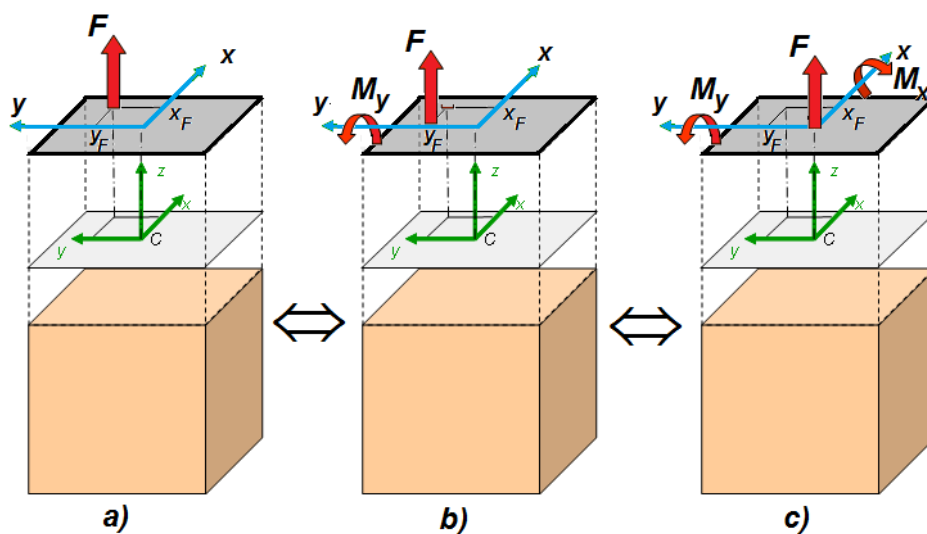


Рис. 7.2 Приведение силы к центру

Приведем силу F в центр тяжести сечения, т.е. направим вдоль оси стержня. При этом появятся две пары сил M_x и M_y относительно главных центральных осей (рис. 7.2.с).

Таким образом, в поперечном сечении стержня при внецентренном растяжении и сжатии возникают три внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F$ и два изгибающих момента $M_x = F \cdot y_F$ и $M_y = F \cdot z_F$ относительно главных центральных осей поперечного сечения.

Формула для нормальных напряжений может быть получена как алгебраическая сумма нормальных напряжений, возникающих от каждого вида нагружения:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z}$$

где y_F, z_F – координаты точки приложения силы F .

$$M_y = F \cdot z_F$$

$$M_z = F \cdot y_F$$

Для определения опасных точек сечения необходимо найти положение нейтральной линии (н.л.) как геометрического места точек, в которых напряжения равны нулю.

$$\frac{F}{A} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} + \frac{M_z \cdot y}{J_z} = 0$$

Уравнение н.л. может быть записано как уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

если

$$a = -\frac{i_z^2}{y_F} \quad \text{и} \quad b = -\frac{i_y^2}{z_F}$$

где a и b – отрезки, отсекаемые н.л. на осях координат.

Из формул следуют некоторые закономерности, связывающие положения полюса (т.е. точки приложения силы) и нейтральной линии, которые удобно использовать для анализа решения задачи. Перечислим самые важные из этих закономерностей:

- нейтральная линия всегда расположена в квадранте, противоположном тому, в котором находится полюс (рис. 7.3);
- если полюс находится на одной из главных осей, то нейтральная линия перпендикулярна этой оси;
- если полюс приближается к центру тяжести сечения, то нейтральная линия удаляется от него.

- если полюс движется по прямой линии, то нейтральная линия поворачивается вокруг неподвижной точки.

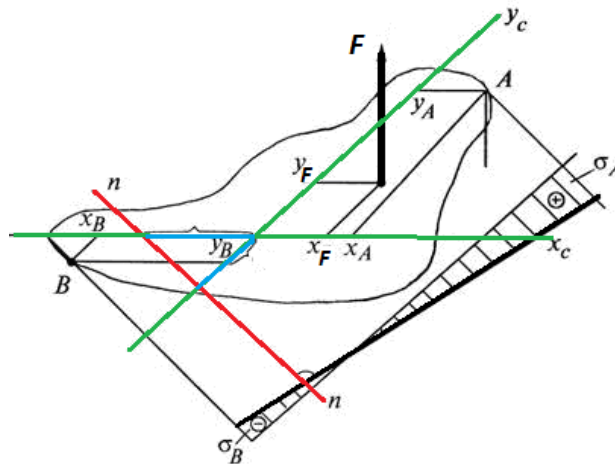


Рис. 7.3 Эпюры внутренних сил при внецентренном растяжении

Для сечений со сложным контуром знание положения нулевой линии очень важно. Наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нулевой линии.

Тогда

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

Нейтральная линия разделяет поперечное сечение на зоны с растягивающими и сжимающими напряжениями.

Если сечение симметрично относительно главных осей, то условие прочности записывается для пластичных материалов, у которых $[s_c] = [s_p] = [s]$, в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

Для хрупких материалов, у которых $[s_c] \neq [s_p]$, условие прочности следует записывать отдельно для опасной точки сечения в растянутой зоне:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_y \cdot z_1}{J_y} + \frac{M_z \cdot y_1}{J_z} \leq [\sigma_p]$$

и для опасной точки сечения в сжатой зоне:

$$\sigma = \frac{F}{A} - \frac{M_y \cdot z_2}{J_y} - \frac{M_z \cdot y_2}{J_z} \leq [\sigma_c]$$

где z_1, y_1 и z_2, y_2 – координаты наиболее удаленных от нейтральной линии точек сечения в растянутой 1 и сжатой 2 зонах сечения.

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или

растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид нагружения довольно распространен в технике, так как в реальной ситуации почти невозможно приложить растягивающую нагрузку точно в центре тяжести.

Изгиб с кручением.

Изгиб с кручением – вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающие и крутящий моменты.

Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось x (рис. 7.4, а). Силу F разложим на ее составляющие F_z , F_y . Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении x (рис. 7.4, б).

Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдем внутренние усилия. Из шести внутренних усилий не равно нулю пять.

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0; \quad N = 0; \quad \Sigma M_x = 0; \quad T = F \cdot e; \\ \Sigma y = 0; \quad Q_y = F_y; \quad \Sigma M_y = 0; \quad M_y = F_z \cdot x; \\ \Sigma z = 0; \quad Q_z = F_z; \quad \Sigma M_z = 0; \quad M_z = F_y \cdot x. \end{aligned}$$

На выделенном элементе B (рис. 7.5, б) показаны действующие по его граням напряжения (рис. 7.5, а).

От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения τ_{Q_y} , τ_{Q_z} , τ_T . От изгибающих моментов – нормальные напряжения σ' и σ'' . Для длинных валов и балок ($\ell > 10 d$) влиянием поперечных сил часто пренебрегают. Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (рис. 7.5, б).

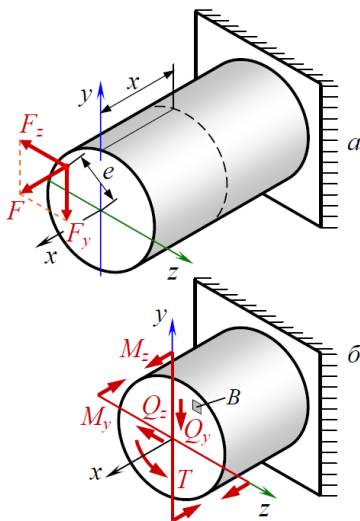


Рис. 7.4. Определение внутренних усилий при изгибе с кручением

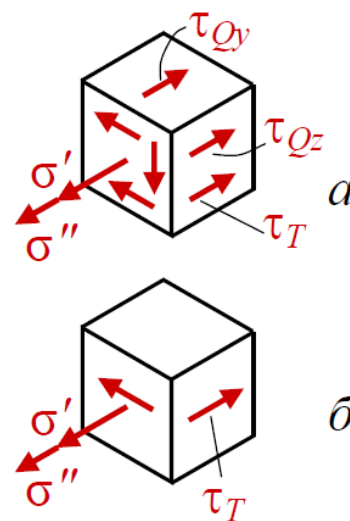


Рис. 7.5. Анализ напряженного состояния

Косой изгиб.

При ранее рассмотренном прямом поперечном изгибе нагружение и искривление оси бруса происходит в одной из 2-х главных плоскостей сечения. Если силовая плоскость или плоскость действия изгибающего момента не содержит ни одной из главных центральных осей, то такой изгиб называется косым; при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения (рис. 7.6).

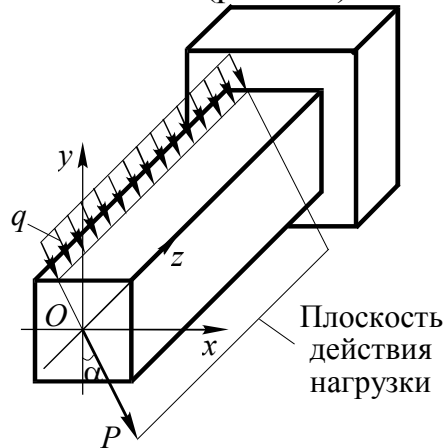


Рис. 7.6. Косой изгиб

На рис. 7.6 оси Oy и Ox – главные центральные оси сечения. Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб в 2-х главных плоскостях. Тогда получим две системы сил, каждая из которых вызывает прямой изгиб. В этом случае в сечении бруса возникает четыре внутренних силовых фактора: Q_z , Q_y , M_z и M_y . При проведении расчета на прочность бруса касательными напряжениями обычно пренебрегают.

Вычислим напряжения от действия сосредоточенной силы P на конце бруса в некоторой точке $A(x, y)$ поперечного сечения, удаленного от конца на расстояние z . Раскладывая силу P по осям Ox и Oy , будем иметь (см. рис. 7.7).

$$M_x = P_y \cdot z = -P \cos \alpha \cdot z, \quad M_y = -P_x \cdot z = -P \sin \alpha \cdot z.$$

Нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x и M_y в точке $A(x, y)$ найдем по формуле Навье

$$\sigma' = -\frac{M_x y}{J_x}; \quad \sigma'' = \frac{M_y x}{J_y}.$$

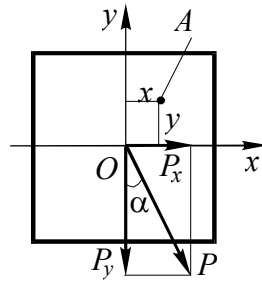


Рис. 7.7. Косой изгиб. Вычисление нормальных напряжений

Суммарное нормальное напряжение равно:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -\frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} = Pz \left(\frac{y \cos \alpha}{J_x} - \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right).$$

Таким образом, косой изгиб - вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающие моменты в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях.

Методические рекомендации для подготовки к промежуточной аттестации

Цель промежуточной аттестации обучающихся - комплексная и объективная оценка качества усвоения обучающимися теоретических знаний, умения применять полученные знания в решении практических задач при освоении учебной дисциплины.

Дисциплина «Прикладная механика» изучается во 2 и 3 семестрах. По окончании второго семестра промежуточная аттестация проводится в форме дифференцированного зачета. По окончании третьего семестра сдается экзамен.

В период подготовки к зачету и экзамену обучающиеся вновь обращаются к пройденному учебному материалу. При этом они не только закрепляют полученные знания, но и получают новые. Подготовка обучающихся к промежуточной аттестации должна включать в себя три этапа:

- самостоятельная работа в течение семестра;
- непосредственная подготовка в дни, предшествующие зачету/экзамену по темам курса;
- подготовка к ответу на вопросы, содержащиеся в билетах.

Основным источником при подготовке к зачету и экзамену является конспект лекций, где учебный материал дается в систематизированном виде, основные положения его детализируются, подкрепляются современными фактами и информацией, которые в силу новизны не вошли в опубликованные печатные источники. В ходе подготовки к зачету и экзамену обучающимся необходимо обращать внимание не только на уровень запоминания, но и на степень понимания излагаемых проблем.

Для успешного прохождения промежуточной аттестации по дисциплине «Прикладная механика» необходимо подготовиться по следующему перечню вопросов и практических заданий.

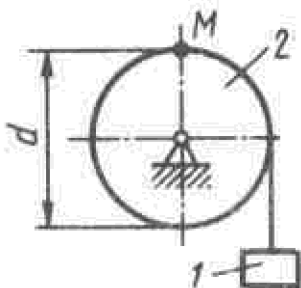
Перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации (в форме дифференцированного зачета) по итогам освоения дисциплины «Прикладная механика»

1. Предмет кинематики. Понятие об абсолютно твердом теле. (ОПК-3).
2. Скорость и ускорение точки. (ОПК-3).
3. Векторный способ задания движения точки. (ОПК-3).
4. Естественный способ задания движения точки. (ОПК-3).
5. Координатный способ задания движения точки. (ОПК-3).
6. Поступательное движение твердого тела. (ОПК-3).
7. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. (ОПК-3).
8. Скорости и ускорения точек вращающегося тела. (ОПК-3).
9. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. (ОПК-3).
10. Разложение плоского движения твердого тела на поступательное и вращательное. (ОПК-3).
11. Скорости точек тела плоской фигуры. (ОПК-3).

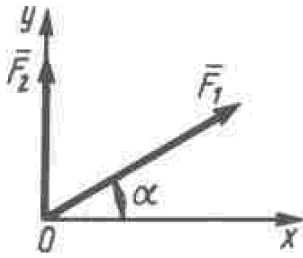
12. Ускорения точек тела плоской фигуры. (ОПК-3).
13. Абсолютное и относительное движение точки. Сложение скоростей. (ОПК-3).
14. Сложение ускорений. Теорема Кориолиса. (ОПК-3).
15. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. (ОПК-3).
16. Предмет динамики и статики. Система сил. (ОПК-3).
17. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики. (ОПК-3).
18. Связи и реакции связей. (ОПК-3).
19. Проекция силы на ось и на плоскость. (ОПК-3).
20. Момент силы относительно центра и оси. Пара сил. (ОПК-3).
21. Аналитические условия равновесия произвольной системы сил. (ОПК-3).
22. Центр тяжести твердого тела и его координаты. (ОПК-3).
23. Механическая система. Масса системы. (ОПК-3).
24. Дифференциальные уравнения механической системы. (ОПК-3).
25. Импульс силы. (ОПК-3).
26. Количество движения материальной точки и механической системы. (ОПК-3).
27. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. (ОПК-3).
28. Работа силы. (ОПК-3).
29. Мощность. (ОПК-3).
30. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. (ОПК-3).

Перечень практических заданий (задач, навыков, нормативов и т.п.) для проведения промежуточной аттестации (в форме дифференцированного зачета) по итогам освоения дисциплины «Прикладная механика»

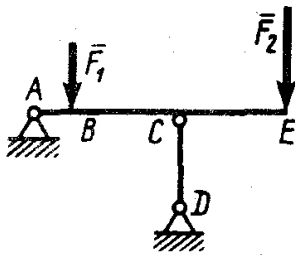
1. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону $\varphi = 5 + 2t^3$. Определить скорость точки М барабана в момент времени $t = 1$ с, если диаметр $d = 0,6$ м. (ОПК-3).



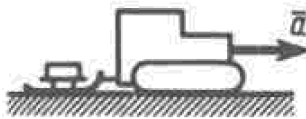
2. Определить угол в градусах между равнодействующей двух сил $F_1 = 10$ Н и $F_2 = 8$ Н и осью Ox , если угол $\alpha = 30^\circ$. (ОПК-3).



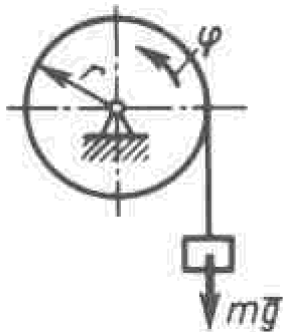
3. Балка AE шарнирно закреплена в точке A и опирается на вертикальный стержень CD . Определить в кН усилие в стержне CD , если длина $AB = 1$ м, $BC = CE = 2$ м, а силы $F_1 = 2$ кН и $F_2 = 4$ кН вертикальны. (ОПК-3).



4. Трактор, двигаясь с ускорением $a = 1$ м/с² по горизонтальному участку пути, перемещает нагруженные сани массой 600 кг. Определить силу тяги на крюке, если коэффициент трения скольжения саней $f = 0,04$. (ОПК-3).



5. Груз массой $m = 60$ кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0,6t^2$. Определить натяжение каната, если радиус $r = 0,4$ м. (ОПК-3).



6. Самолет при посадке касается посадочной полосы с горизонтальной скоростью 180 км/ч. После пробега 1000 м самолет останавливается. Определить модуль среднего замедления самолета. (ОПК-3).

7. Точка массой $m = 0,5$ кг движется по горизонтальной прямой с ускорением $a = 0,3t$. Определить модуль силы действующей на точку в направлении ее движения в момент времени $t = 3$ с. (ОПК-3).

8. Скорость автомобиля 90 км/ч. Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с. (ОПК-3).

9. Точка начинает движение из состояния покоя и движется по прямой с постоянным ускорением $a = 0,2$ м/с². Определить путь, который точка пройдет за

промежуток времени от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 10$ с. (ОПК-3).

10. Заданы уравнения движения точки $x = 1 + 2 \sin 0,1t$, $y = 3t$. Определить координату x точки в момент времени, когда ее координата $y = 12$ м. (ОПК-3).

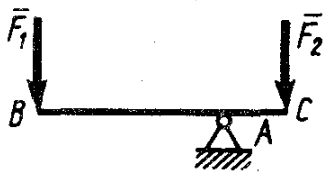
11. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $a_\tau = 1,4$ м/с². Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение $a = 2,6$ м/с². (ОПК-3).

12. Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5$ Н, образующих между собой угол $\alpha = 45^\circ$. (ОПК-3).

13. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ускорение точки $a = 1,5$ м/с², а угол между векторами ускорения и скорости равен 65° . (ОПК-3).

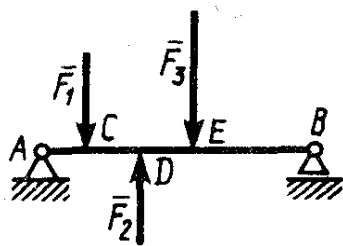
14. Точка движется по окружности, радиус которой $r = 50$ м, со скоростью $V = 2t$. Определить модуль полного ускорения в момент времени $t = 5$ с. (ОПК-3).

15. На брус BC , закрепленный в шарнире A , действуют вертикальные силы $F_1 = 4$ кН и P_2 . Определить силу F_2 в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояния $AC = 2$ м, $AB = 6$ м. (ОПК-3).



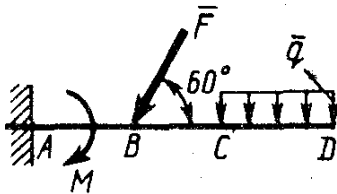
16. Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $s = 0,2t^2 + 0,3 t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 3$ с, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho = 1,5$ м. (ОПК-3).

17. На балку AB действуют вертикальные силы $F_1 = 1$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 3$ кН. Определить в кН реакцию опоры B , если расстояния $AC = CD = DE = 1$ м, $BE = 2$ м. (ОПК-3).



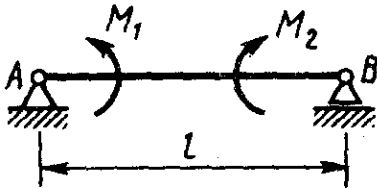
18. Точка движется по окружности радиуса $r = 200$ м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 1$ м/с². Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 20$ с. (ОПК-3).

19. К балке AD приложена пара сил с моментом $M = 200$ Н·м, распределенная нагрузка интенсивностью $q = 20$ Н/м и сила F . Какой должна быть эта сила, для того чтобы момент в заделке A равнялся 650 Н·м, если размеры $AB = BC = CD = 2$ м. (ОПК-3).



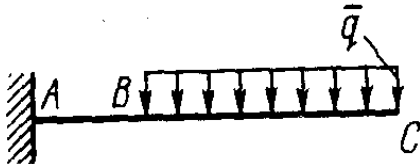
20. Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 с 100 оборотов. Определить угловое ускорение ротора. (ОПК-3).

21. На балку, длина которой $l = 3$ м, действуют пары сил с моментами $M_1 = 2$ кН·м и $M_2 = 8$ кН·м. Определить в кН модуль реакции опоры B. (ОПК-3).



22. При равномерном вращении маховик делает 4 оборота в секунду. За сколько секунд маховик повернется на угол $\varphi = 24\pi$? (ОПК-3).

23. Определить интенсивность нагрузки q , при которой момент в заделке A равен 400 Н·м, если размеры $AB = 2$ м, $BC = 4$ м. (ОПК-3).



24. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$. Определить скорость точки тела на расстоянии $r = 0,5$ м от оси вращения в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 25$ рад.

25. Тело вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon = 5$ рад/с². Определить скорость точки на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega = 0$. (ОПК-3).

Перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации
(в форме экзамена) по итогам освоения дисциплины
«Прикладная механика»

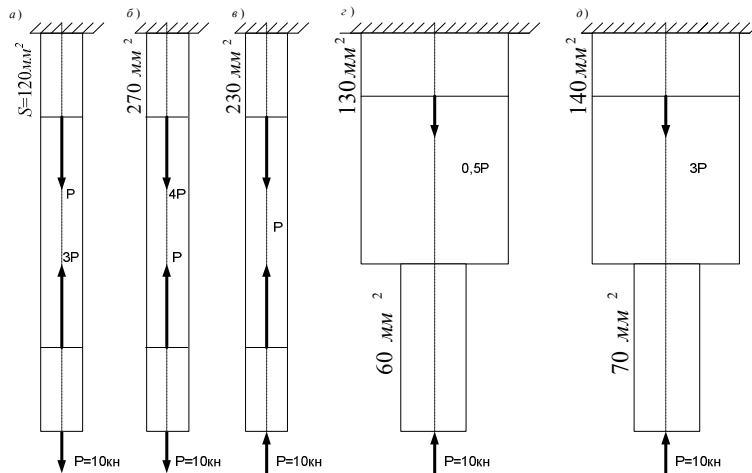
1. Основные понятия теории механизмов и машин. (ПК-3).
2. Основные виды механизмов. (ПК-3).
3. Структурный анализ механизмов. (ПК-3).
4. Классификация кинематических пар. (ПК-3).
5. Классификация машин и механизмов. (ПК-3).
6. Определение степени подвижности методом Чебышева. (ПК-3).
7. Область использования рычажных механизмов в пожарной технике. (ПК-3).
8. Гидропривод механизмов. (ПК-3).
9. Пневмопривод механизмов. (ПК-3).
10. Электропривод механизмов. (ПК-3).

11. Выбор типа приводов. (ПК-3).
12. Степень подвижности кинематических пар. (ПК-3).
13. Последовательность построения план скоростей. (ПК-3).
14. Последовательность построения плана ускорений. (ПК-3).
15. Последовательность построения рычажных механизмов в масштабе. (ПК-3).
16. Проведение испытаний углеродистой стали на растяжение. (ПК-22, ПК-25).
17. Проведение испытаний различных конструкционных материалов на сжатие. (ПК-22, ПК-25).
18. Основные виды деформаций, изучаемых в «Сопротивление материалов». (ПК-22, ПК-25).
19. Деформация центральное растяжение – сжатие. (ПК-22, ПК-25).
20. Продольная сила. Нормальные напряжения в поперечных сечениях. (ПК-22, ПК-25).
21. Перемещения и деформации при растяжении. (ПК-22, ПК-25).
22. Закон Гука при растяжении – сжатии. (ПК-22, ПК-25).
23. Проведение испытаний углеродистой стали на кручение. (ПК-22, ПК-25).
24. Построение диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов. (ПК-22, ПК-25).
25. Прямой поперечный изгиб. (ПК-22, ПК-25).
26. Факторы, определяющие прочность балок при изгибе. (ПК-22, ПК-25).
27. Расчет балок на прочность при изгибе. (ПК-22, ПК-25).
28. Факторы, определяющие прочность брусьев при кручении. (ПК-22, ПК-25).
29. Понятие деформации косоугольного изгиба. (ПК-22, ПК-25).
30. Понятие деформации внецентренного растяжения или сжатия. (ПК-22, ПК-25).
31. Понятие деформации изгиба с кручением. (ПК-22, ПК-25).
32. Понятие коэффициента запаса прочности и факторы его определяющие. (ПК-22, ПК-25).
33. Понятие деформации косоугольного изгиба. (ПК-22, ПК-25).
34. Расчет на прочность при внецентренном растяжении или сжатии. (ПК-22, ПК-25).
35. Расчет на прочность при косоугольном изгибе. (ПК-22, ПК-25).
36. Основные механические характеристики материалов. (ПК-22, ПК-25).
37. Расчет движущихся с ускорением элементов конструкций.
38. Определение опасного сечения балок при изгибе. (ПК-22, ПК-25).
39. Расчет на прочность и жесткость при кручении. (ПК-22, ПК-25).
40. Понятие деформации изгиба с растяжением. (ПК-22, ПК-25).
41. Расчет балок на прочность при изгибе с растяжением. (ПК-22, ПК-25).
42. Понятие модуля упругости материала и факторы его определяющие. (ПК-22, ПК-25).

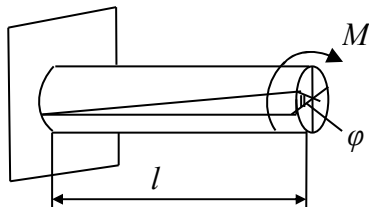
43. Проведение испытаний конструкционных материалов на изгиб. (ПК-22, ПК-25).
 44. Определение модуля сдвига при кручении. (ПК-22, ПК-25).
 45. Способы определения прогибов балок. (ПК-22, ПК-25).

Перечень практических заданий (задач, навыков, нормативов и т.п.)
 для проведения промежуточной аттестации (в форме экзамена) по итогам
 освоения дисциплины «Прикладная механика»

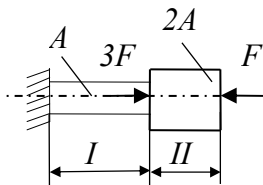
1. Проверить прочность стальных брусьев, изображенных на рисунке, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. (ПК-22, ПК-25).



2. Как изменится угол закручивания свободного конца вала φ , если длина вала l увеличится втрое: (ПК-22, ПК-25).

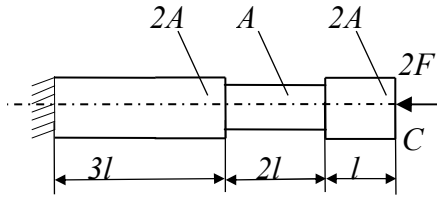


3. Как изменится величина нормальных напряжений на участке I, если длина участка увеличится в 2 раза. (ПК-22, ПК-25).

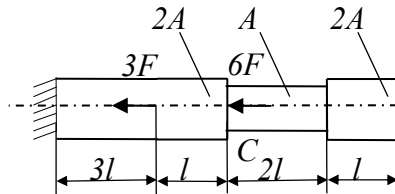


4. Стальной стержень круглого поперечного сечения диаметром 10 мм и длиной 1800 мм под действием растягивающих сил P удлинился на 0,8 мм. Определить величину силы P . (ПК-22, ПК-25).
 5. Медный стержень круглого поперечного сечения диаметром 14 мм и длиной 800 мм под действием растягивающих сил P удлинился на 0,3 мм. Определить величину силы P . (ПК-22, ПК-25).
 6. Ступенчатый стержень подвергается воздействию осевых сил, A – параметр величины площади поперечного сечения. Чему равно перемещение

точки C ? (ПК-22, ПК-25).

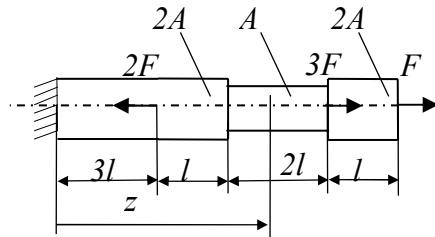


7. Ступенчатый стержень подвергается воздействию осевых сил, A – параметр величины площади поперечного сечения. Чему равно перемещение точки C ? (ПК-22, ПК-25).



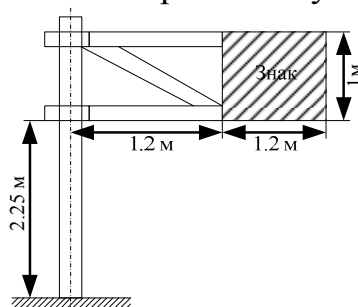
8. Стальной стержень прямоугольного сечения ($b = 15$ мм и $h = 30$ мм) под действием растягивающих сил $P = 72$ кН удлинился на 7,2 мм. Определить первоначальную длину стержня. (ПК-22, ПК-25).

9. Ступенчатый стержень подвергается воздействию осевых сил, A – параметр величины площади поперечного сечения. Чему будут равны нормальные напряжения в сечении, находящемся на расстоянии $z = 5$ м, если $l = 1$ м? (ПК-22, ПК-25).



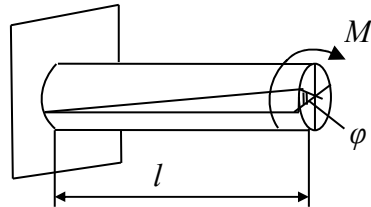
10. Медный стержень квадратного сечения со стороной 10 мм и длиной 600 мм под действием растягивающих сил P удлинился на 0,5 мм. Определить величину силы P . (ПК-22, ПК-25).

11. Стальной стержень круглого сечения должен быть применен в качестве столба для установки дорожного знака, как указано на рисунке. Наибольшее давление ветра на знак предполагается равным 50 Н/м². Угол поворота стержня в месте прикрепления нижнего захвата знака не должен превышать 1° . Наибольшие касательные напряжения от кручения в поперечном сечении трубы не должны быть больше 25 МПа. Определить диаметр стержня. Считать, что давление ветра передаётся только на заштрихованную площадь. (ПК-22, ПК-25).



12. К нижнему концу троса подвешен груз весом $P = 75$ кН. Трос составлен из проволок диаметром $d = 2$ мм. Допускаемое напряжение для материала троса равно $[\sigma] = 300$ МПа. Из какого количества проволок должен быть составлен трос. (ПК-22, ПК-25).

13. Как изменится прочность вала, если длина вала l увеличится втрое при прочих равных условиях:



14. Два вала одинаковой длины и диаметра, но из разных материалов $G_2 = 4G_1$, скручиваются одинаковыми моментами. Чему будет равно отношение углов закручивания $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$? (ПК-22, ПК-25).

15. Подобрать квадратные поперечные сечения отдельных частей колонны, изображенной на рисунке, если предельная нагрузка на колонну составит $P = 100$ т, а допускаемые напряжения на сжатие следующие: (ПК-22, ПК-25).

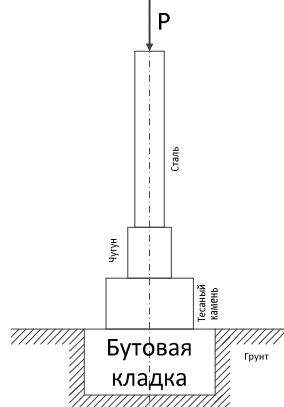
для стали $[\sigma] = 140$ МПа;

для чугуна $[\sigma] = 100$ МПа;

для тесаного камня $[\sigma] = 4$ МПа;

для бутовой кладки $[\sigma] = 1,5$ МПа;

для грунта (песок) $[\sigma] = 0,5$ МПа.



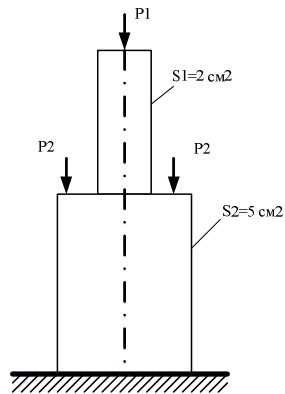
16. В брусе круглого поперечного сечения диаметром $d=80$ мм, изготовленного из стали с допустимым касательным напряжением $[\tau]_{\max} = 40$ МПа, требуется определить касательное напряжение в точке, удалённой от центра сечения на 20 мм. (ПК-22, ПК-25).

17. Модуль упругости первого рода для алюминия $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,34$. Чему равен модуль упругости при сдвиге G ? (ПК-22, ПК-25).

18. Стальной вал вращается с угловой скоростью $n = 980$ об/мин и передаёт мощность $N = 40$ кВт. Определить требуемый диаметр вала, если допускаемое касательное напряжение материала $[\tau] = 25$ МПа. (ПК-22, ПК-25). (ПК-22, ПК-25).

19. Двухступенчатая колонна нагружена силами P_1 и P_2 . Материал колонны

– конструкционная сталь с допускаемым нормальным напряжением $[\sigma] = 180$ МПа. Определить предельно допустимую нагрузку на обе части колонны. (ПК-22, ПК-25).



20. Два вала одинаковой длины и диаметра, но из разных материалов $G_2 = 2G_1$, закручиваются на одинаковый угол. Чему будет равно отношение крутящих моментов $\frac{M_1}{M_2}$? (ПК-22, ПК-25).

Словарь терминов по дисциплине «Прикладная механика»

Абсолютный сдвиг	- это величина наибольшего смещения частиц материала по отношению к их первоначальному положению.
Балка	- это конструктивная деталь, какого-либо сооружения, выполняемая в большинстве случаев в виде прямого бруска с опорами в 2-х (или более) точках и несущая вертикальные нагрузки.
Брус	- наз. тело, одно из измерений которого (длина) значительно превышает два других.
Деформация	- это способность тела изменять форму и размер под действием внешних сил.
Динамика	- изучает движение материальных тел под действие сил.
Допускаемое Напряжение	- это напряжение, для которого конструкция работоспособная и они составляют часть от напряжений, которые являются опасными.
Жесткость	- это способность конструкции (или отдельного элемента) сопротивляться упругим деформациям.
Изгибающий Момент	- это составляющие моменты, возникающие в плоскостях перпендикулярных поперечному сечению бруса.
Кинематика	- это раздел механики, занимающийся изучением движения материальных тел без учета их массы и действующих на них сил.
Крутящий момент ($M_{кр}$)	- это составляющая главного момента внутренних сил момент, возникающий в плоскости поперечного сечения.
Кручение	- это такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один силовой фактор - крутящий момент.
Материальная точка	- это геометрическая точка, обладающая массой
Метод сечения	- применяется для выявления внутренних ил в сопротивлении материалов.
Напряжение	- это числовая мера интенсивности внутренних сил.
Нагрузка	- это равновесная система внешних сил, состоящая из активных сил и реакций связей.
Нормальная (продольная) сила	- это составляющая главного вектора внутренних сил, направленная перпендикулярно плоскости поперечного сечения бруса.
Пара сил	- это система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны.
Плечо силы	- это кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы.
Проекция вектора силы	- это произведение модуля вектора на \cos угла между осью и вектором.

Прочность	- это способность конструкции (или отдельного ее элемента) выдерживать заданную нагрузку не разрушаясь и без появления остаточных деформаций.
Принцип начальных размеров	- это первоначальная форма тела (элемента конструкции) и его начальных размеров.
Поперечный момент сопротивления	- это отношение полярного момента инерции сечения к его радиусу.
Прямой чистый изгиб	- это такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор - изгибающий момент.
Прогиб бруса	- это линейные перемещения центров тяжести произвольных поперечных сечений при изгибе.
Предел выносливости	- это наибольшее напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания.
Реакция связи	со стороны связей к телу приложена сила.
Сила	- это мера механического действия одного материального тела на другое.
Система сил	- это несколько сил, действующих на какой-либо одно твердое тело.
Свободное тело	- это твердое тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении.
Связи	- это тела, которые ограничивают перемещение данного тела.
Скорость	- это векторная величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки.
Статика	- это общий раздел, изучающий равновесие тел и тела в покое.
Устойчивость	- это способность конструкции (или отдельного элемента) сопротивляться упругим деформациям.
Ускорение	- это векторная величина, характеризующая быстроту изменения направления и числового значения скорости.
Упругая линия	- это изогнутая ось бруса
Цикл Напряжения	- это совокупность последовательных напряжений за один период их изменения.
Чистый сдвиг	- это сдвиг, при котором материал равномерно смещается в поперечном сечении и при котором возникают только касательные напряжения.
Эпюра	- это график измерения продольной силы или других внутренних силовых факторов, по длине стержня.